УДК 629.788 DOI: 10.18503/2306-2053-2021-9-2-6-10

МОДЕЛИРОВАНИЕ СКОРОСТИ МЕТЕОРОИДОВ

Павлов В.Д.

Аннотация: Цель исследования – аналитическое описание участка баллистической траектории, соответствующего нормальному падению метеороидов или космического аппарата на поверхность безатмосферной планеты. При этом движение нормально падающего тела характеризуется возрастающим ускорением свободного падения. Задача о скорости, времени и ускорении нормального падения тела на поверхность планеты при отсутствии атмосферы сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка, которое решается стандартным методом. В работе получено временное уравнение движения нормально падающего на поверхность планеты тела при отсутствии атмосферы, а также временные уравнения его скорости и ускорения. Полученные результаты могут быть полезны при расчетах скорости метеороидов и пассивного гравитационного маневра при межпланетных полетах и расчетах отвесного падения небольших небесных тел и отработанных элементов конструкций космических аппаратов.

Ключевые слова: планета, тело, уравнение движения, скорость, ускорение, масса, расстояние.

Введение

В основе расчета скорости метеороидов [1-3] и пассивных гравитационных маневров [4-6] при межпланетных полетах лежит режим движения под действием силы тяготения небесных тел [7-10].

Если перемещение тела при падении пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием до центра тяготения, то ускорение свободного падения является практически неизменным. При этом задача установления параметров падения не представляет трудности. Далее этот случай не рассматривается.

Задача о скорости и времени падения тела

Падающее в вакууме тело имеет ускорение

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M}{r^2}, \tag{1}$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса планеты, r – мгновенное расстояние между телом и центром планеты. Исходное расстояние равно R. Знак «–» обусловлен противоположными направлениями векторов a и r. Масса тела пренебрежимо мала по сравнению с M.

Дифференциальное уравнение (1) решается следующим образом.

$$\frac{dr}{dt} = v(r), \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dr}{dr} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dr}v,$$

$$\frac{dv}{dr}v = -G\frac{M}{r^2}, \qquad vdv = -GM\frac{dr}{r^2}, \qquad \int_0^v vdv = -GM\int_R^r \frac{dr}{r^2}, \quad \frac{v^2}{2} = GM\frac{1}{r}\Big|_R^r,$$

$$\frac{v^2}{2} = GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right), \tag{2}$$

$$v = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}. \tag{3}$$

Знак «–» обусловлен той же причиной, что и выше.

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}},$$

$$\sqrt{\frac{r}{R-r}}dr = -\sqrt{\frac{2GM}{R}}dt. \tag{4}$$

Интеграл левой части имеет вид:

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx.$$

Пусть

$$\frac{a+x}{b-x} = t^2,$$

тогда

$$a+x = t^2b - t^2x,\ x(1+t^2) = t^2b - a,\ x = \frac{t^2b-a}{1+t^2},\ dx = \frac{2tbdt}{1+t^2} - \frac{t^2b-a}{(1+t^2)^2}2tdt,$$

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx = \int t\left[\frac{2tb}{1+t^2} - \frac{t^2b-a}{(1+t^2)^2}2t\right]dt = \int \frac{2t^2b}{1+t^2}dt - \int \frac{t^2b-a}{(1+t^2)^2}2t^2\,dt =$$

$$= 2b\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt - 2b\int \frac{t^4 - t^2\frac{a}{b} + 2t^2 - 2t^2 + 1 - 1}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= 2b\int dt - 2b\int \frac{1}{1+t^2}dt - 2b\int dt + 2b\int \frac{t^2\frac{a}{b} + 2t^2 + 1}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= -2b\int \frac{1}{1+t^2}dt + 2b\left(\frac{a}{b}+2\right)\int \frac{t^2 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b}+2\right)} + 1 - 1}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= -2b\mathrm{arctg}t + 2b\left(\frac{a}{b}+2\right)\int \frac{dt}{1+t^2} - 2b\left(\frac{a}{b}+2\right)\frac{a+b}{a+2b}\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= -2b\mathrm{arctg}t + 2b\left(\frac{a}{b}+2\right)\mathrm{arctg}t - 2b\frac{a+2b}{b}\frac{a+b}{a+2b}\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2} + \mathrm{arctg}t\right) + C =$$

$$= -2b\mathrm{arctg}t + 2b\left(\frac{a}{b}+2\right)\mathrm{arctg}t - \frac{(a+b)t}{1+t^2} - (a+b)\mathrm{arctg}t + C =$$

$$= (a+b)\left(\mathrm{arctg}t - \frac{t}{1+t^2}\right) + C = (a+b)\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}} - (a+b)\frac{\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}}{1+\frac{a+x}{b-x}} + C =$$

$$= (a+b)\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}} - (a+b)\frac{b-x}{a+b}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}} + C =$$

$$= (a+b)\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}} - \sqrt{(b-x)(a+x)} + C.$$

Искомый интеграл равен

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx = (a+b)\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}} - \sqrt{(b-x)(a+x)} + C. \quad (5)$$

Продолжение решения исходной задачи

Интегрирование дифференциального уравнения (4) в соответствии с (5) дает

$$\int_R^r \sqrt{\frac{r}{R-r}}dr = -\sqrt{\frac{2GM}{R}}\int_0^t dt\,, \qquad \left[R\,arc\,t\,g\sqrt{\frac{r}{R-r}} - \sqrt{r(R-r)}\right]\Bigg|_R^r = -\sqrt{\frac{2GM}{R}}\int_0^t dt,$$

$$R\,arc\,t\,g\sqrt{\frac{r}{R-r}} - R\frac{\pi}{2} - \sqrt{r(R-r)} = -\sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$R\left(\frac{\pi}{2} - arc\,t\,g\sqrt{\frac{r}{R-r}}\right) + \sqrt{r(R-r)} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}t. \qquad (6)$$

Это решение дифференциальных уравнений (4) и (1) является уравнением движения нормально падающего тела. Из выражения (2) следует

$$r = \frac{2GMR}{2GM + Rv^2}.$$

Подстановка этого выражения в (7) дает

$$R\left(\frac{\pi}{2} - arc\,t\,g\sqrt{\frac{\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}}{R - \frac{2GMR}{2GM+Rv^2}}}\right) + \sqrt{\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}\left(R - \frac{2GMR}{2GM+Rv^2}\right)} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$R\left(\frac{\pi}{2} - arc\,t\,g\sqrt{\frac{2GMR}{2GMR + R^2v^2 - 2GMR}}\right) + \sqrt{\frac{2GMR(2GMR + R^2v^2 - 2GMR)}{(2GM+Rv^2)^2}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$\frac{\pi}{2} - arc\,t\,g\frac{\sqrt{2GMR}}{Rv} + \frac{v\sqrt{2GMR}}{2GM+Rv^2} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\frac{t}{R}.$$

Это временная функция скорости. Для получения временной функции ускорения следует (1) подставить в (7).

$$R\left(\frac{\pi}{2} - arc\,t\,g\sqrt{\frac{(GMa^{-1})^{\frac{1}{2}}}{R - (GMa^{-1})^{\frac{1}{2}}}}\right) + \sqrt{(GMa^{-1})^{\frac{1}{2}}(R - (GMa^{-1})^{\frac{1}{2}})} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}t.$$

В соответствии с (6) период падения тела на поверхность планеты равен

$$RR\left(\frac{\pi}{2} - arc\,t\,g\sqrt{\frac{R_M}{R-R_M}}\right) + \sqrt{R_M(R-R_M)} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}T, \qquad (7)$$

где RM – радиус планеты.

В соответствии с (3) скорость тела у поверхности планеты равна

$$V = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{R_M} - \frac{1}{R}}. \qquad (8)$$

Пример

В качестве планеты рассматривается Луна: $R_M = 1{,}737\cdot10^6$ м, $M = 7{,}348\cdot10^{22}$ кг. $G = 6{,}674\cdot10^{-11}$ м³/(кг·с²). $R = 10^7$ м, что соответствует высокой почти круговой околополярной орбите вокруг Луны.

В соответствии с (7)

$$10^7\left(\frac{\pi}{2} - arc\,t\,g\sqrt{\frac{1{,}737\cdot10^6}{(10-1{,}737)\cdot10^6}}\right) + \sqrt{1{,}737\cdot10^6(10-1{,}737)\cdot10^6} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot6{,}674\cdot10^{-11}\cdot7{,}348\cdot10^{22}}{10^7}}T.$$

Период падения тела на поверхность Луны равен

$$T = 1{,}535\cdot10^4 \text{ с} = 2{,}558\cdot10^2 \text{ мин.} = 4{,}253 \text{ ч.}$$

В соответствии с (8) скорость тела у поверхности Луны равна

$$V = -\sqrt{2\cdot6{,}674\cdot10^{-11}\cdot7{,}348\cdot10^{22}}\sqrt{\frac{1}{1{,}737\cdot10^6} - \frac{1}{10^7}} = 2160 \text{ м/с.}$$

Заключение

Полученные результаты могут быть полезны при расчетах пассивного гравитационного маневра при межпланетных полетах и расчетах отвесного падения небольших небесных тел и отработанных элементов конструкций космических аппаратов.

Список использованных источников

1. Челябинский метеороид: отклик ионосферы по измерениям GPS / М.Б. Гохберг [и др.] // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 452. – № 2. – С. 208.
2. Рябова, Г.О. Профиль активности метеорного потока Геминид / Г.О. Рябова // Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы. – 2001. – Т. 35. – № 2. – С. 167-173.
3. Егорова, Л.А. Баллистика и разрушение космических тел в атмосфере планет / Л.А. Егорова, В.В. Лохин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4-2. – С. 130-132.
4. Константинов, М.С. Анализ схем использования гравитационного маневра у луны для обеспечения вектора гиперболического избытка скорости отлета от земли / М.С. Константинов // Вестник Московского авиационного института. – 2010. – Т. 17. – № 3. – С. 9.
5. Назиров, Р.Р. Гравитационные маневры как способ направить малые астероиды на траекторию встречи с опасными околоземными объектами / Р.Р. Назиров, Н.А. Эйсмонт // Космические исследования. – 2010. – Т. 48. – № 5. – С. 491-496.
6. Ельников, Р.В. Гравитационный маневр у Луны при межпланетных перелетах космического аппарата с малой тягой / Р.В. Ельников // Труды МАИ. – 2012. – № 50. – С. 16.
7. Смирнов, О.Г. Тяготение, отталкивание, разрывающие силы и тепловое излучение во Вселенной / О.Г. Смирнов // Актуальные проблемы современной науки. – 2007. – № 5(37). – С. 122-130.
8. Кузмак, Г.Е. О некоторых свойствах оптимального управления пространственным движением материальной точки в однородном центральном поле тяготения / Г.Е. Кузмак // Ученые записки ЦАГИ. – 1970. – Т. 1. – № 5. – С. 55-63.
9. Бурдаев, М.Н. Применение метода годографов к расчету времени перелета в Центральном поле тяготения / М.Н. Бурдаев // Космические исследования. – 2009. – Т. 47. – № 2. – С. 204-208.
10. Брауде, А.З. Оптимальное изменение вектора скорости при движении в однородном поле тяготения / А.З. Брауде, Г.Е. Кузмак // Ученые записки ЦАГИ. – 1975. – Т. 6. – № 1. – С. 57-66.

Материал поступил в редакцию: 03.03.2021
Материал принят к публикации: 26.09.2021

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

FORMULAS FOR CALCULATING THE SPACE VEHICLE GRAVITY MANEUVER

Pavlov V.D.

Abstract. The purpose of the study is an analytical description of the normal fall of a body on the surface of a beatmospheric planet. In this case, the motion of a normally falling body is characterized by an increasing acceleration of gravity. The problem of the speed, time and acceleration of the normal fall of a body on the planet's surface in the absence of an atmosphere is reduced to solving a second-order differential equation, which is solved by the standard method. In this work, the time equation of motion of a body normally falling on the surface of the planet in the absence of an atmosphere, as well as the time equations of its speed and acceleration are obtained. Expressions for distance, speed and acceleration are obtained as implicit functions of time. The results obtained can be useful in calculating the normal incidence of small celestial bodies and spent structural elements of spacecraft.

Keywords: planet, body, equation of motion, speed, acceleration, mass, distance.

References

1. Gokhberg M.B. [i dr.] (2013) *Doklady Akademii nauk*, 452 : 208.
2. Ryabova, G.O. (2001) *Astronomicheskij vestnik. Issledovaniya Solnechnoj sistemy*, 35 : 167-173.
3. Egorova L.A., Lokhin V.V. (2011) Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 4-2 : 130-132.
4. Konstantinov M.S. (2010) *Vestnik Moskovskogo aviaczionno-go instituta*, 17 : 9.
5. Nazirov R.R., Ejsmont N.A. (2010) *Kosmicheskie issledovaniya*, 48 : 491-496.
6. Elnikov R.V. (2012) *Trudy` MAI*, 50 : 16.
7. Smirnov O.G. (2007) *Aktualnye problemy sovremennoj nauki*, 5(37) : 122-130.
8. Kuzmak G.E. (1970) *Ucheny`e zapiski CzAGI*, 1 : 55-63.
9. Burdaev M.N. (2009) *Kosmicheskie issledovaniya*, 47 : 204-208.
10. Braude A.Z., Kuzmak G.E. (1975) *Uchenye zapiski CzAGI*, 6 : 57-66.

ОБ АВТОРАХ:

Павлов Валентин Дмитриевич – старший преподаватель Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. Email: pavlov.val.75@mail.ru.

ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Павлов, В.Д. Моделирование скорости метеороидов / В.Д. Павлов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2021. – Т.9. – № 2. – С. 6-10. DOI: 10.18503/2306-2053-2021-9-2-6-10.

Pavlov V.D. (2021) Formulas for calculating the space vehicle gravity maneuver. Software of systems in the industrial and social fields. 9 (2): 6-10. DOI: 10.18503/2306-2053-2021-9-2-6-10