УДК 510 DOI: 10.18503/2306-2053-2021-9-1-12-15

О ВЕКТОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ В *N*-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Погодин И.Е.

Аннотация. Рассматривается «избирательность» операции классического векторного произведения к размерности соответствующего векторного пространства. Предлагаются простые пути демонстрации ее неосуществимости при произвольной размерности. Цель работы – найти методически удобные способы, облегчающие изучающим математику на языке базовых понятий убедиться в наличии «избирательности» классического векторного произведения к размерности векторного пространства, а также роль исходных требований модели. В качестве альтернативы обсуждается недавно опубликованный способ получения векторов, ортогональных конкретной паре исходных векторов при любой размерности, и условия его реализации.

Ключевые слова: векторное произведение, размерность векторного пространства, орты, скалярное произведение.

Введение

Известно, что широко используемая в линейной алгебре операция векторного произведения может быть определена лишь в векторных пространствах определенных размерностей, а именно: в трехмерном и семимерном, что имеет целый ряд достаточно сложных доказательств, например, [1] и другие, цитированные в [1] источники. Корни этой проблемы уходят к теореме Гурвица, доказанной им в конце 1890-х годов. В методическом отношении при преподавании линейной алгебры этот факт «избирательности» к размерности – в отличие, например, от инвариантного к размерности скалярного произведения – зачастую вызывает психологическую неудовлетворенность тех, кто впервые сталкивается с этим фактом.

Психологическое «неудобство» от такой «избирательности» операции векторного произведения до сих пор порождает попытки ее преодоления [2].

Достаточно удивительно, особенно для начинающих изучать математику, что – вопреки многократно доказывавшийся невозможности векторного произведения в векторном пространстве произвольной размерности – в [2] показан путь универсального построения векторного произведения

Поэтому здесь предпринимается попытка более наглядными простыми средствами, если не объяснить, то, по крайней мере, продемонстрировать факт невозможности построить операцию векторного произведения в пространстве произвольной размерности, т.е. показать каким конкретным образом природа позволяет или не позволяет построение рассматриваемой операции. Кроме того, рассматриваются причины успеха метода [2].

Результаты аналитического исследования

Попробуем построить алгоритм получения векторного произведения двух векторов n-мерного (n>3) пространства по аналогии с трехмерным пространством.

Для этого зададим следующие правила векторного перемножения всевозможных пар ортонормированных базисных ортов $\{\vec{e}_i\}$, где $i = 1 \dots n$:

1) $[\vec{e}_i, \vec{e}_i] = 0$;
2) $[\vec{e}_i, \vec{e}_k] = -[\vec{e}_k, \vec{e}_i]$ при любых i, k («кососимметричность»);
3) $[\vec{e}_i, \vec{e}_k] = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \, \vec{e}_s$ в остальных случаях, причем $\alpha_i = 0$ и $\alpha_k = 0$.

Здесь принципиально важно как проводить обобщение ситуации из 3-мерного пространства. Классический подход предполагает, что и в n-мерном пространстве в результате такого векторного перемножения двух ортов в правой части равенства (3) только один из ненулевых коэффициентов $\{\alpha_k\}$ может равняться ± 1, остальные равны нулю. В 3-мерном пространстве ничего другого быть не могло.

С целью проверки осуществимости предложенной процедуры векторного перемножения следует потребовать, чтобы векторное произведение пары произвольных векторов $\vec{A}$ *и* $\vec{B}$ рассматриваемого n-мерного пространства было ортогонально каждому из этих векторов, т.е. образовывало бы с каждым из них нулевое скалярное произведение.

Выразив, кроме того, синус угла между векторами $\vec{A}$ *и* $\vec{B}$ через скалярное произведение этих векторов рассматриваемые три необходимых условия можно записать так:

$$([\vec{A} * \vec{B}], \vec{A}) = 0$$

$$([\vec{A} * \vec{B}], \vec{B}) = 0$$

$$|\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A}, \vec{B})^2 = |[\vec{A} * \vec{B}]| \quad .$$

Отметим, что эти три условия можно преобразовать в уравнение эллипсоида размерности (n-2), на поверхности которого должны располагаться концы векторов $[\vec{A} * \vec{B}]$. В 3-мерном случае этот эллипсоид вырождается в симметричный отрезок с концами $\pm|[\vec{A} * \vec{B}]|$.

Будем искать решение совместной неопределенной системы первых двух линейных алгебраических уравнений с $C_n^2(n-2)$ неизвестными, построенных с учетом правил (1-3). На практике поступим иначе: пробным путем переберем все возможные предположения о допустимых значениях коэффициентов-проекций $\{\alpha_s\}$, подставим их в два соответствующих выражения для скалярных произведений на предмет их равенства нулю.

Если при каком-то значении размерности пространства n удастся получить выполняющие эти условия комплекты коэффициентов $\{\alpha_s\}$, то в этом пространстве построить векторное произведение возможно.

Для 3-мерного пространства, если мы «не заметили» правила (2) $[e_1 * e_3] = -e_2$, правило (4): векторного перемножения в рамках предлагаемого выше подхода должно выглядеть так:

$$[e_1 * e_3] = \alpha e_2.$$

Тогда требование ортогональности векторов $[\vec{A} * \vec{B}]$ и $\vec{A}$, а также векторов $[\vec{A} * \vec{B}]$ и $\vec{B}$ в форме равенства нулю их скалярных произведений (векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$произвольные) приводит к единственному результату α=-1, что совпадает с традиционным определением векторного произведения для 3-мерного пространства.

В 4-мерном пространстве правило (4) векторного перемножения получает 2 случая для четырех коэффициентов, а в 5-мерном 5 случаев для пятнадцати коэффициентов. Для того, чтобы показать здесь невозможность построения операции векторного произведения достаточно показать невозможность выполнения требования ортогональности векторов $[\vec{A} * \vec{B}]$ и $\vec{A}$, а также векторов $[\vec{A} * \vec{B}]$ и $\vec{B}$ в форме равенства нулю их скалярных произведений для любых конкретных векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$, например, для векторов с компонентами: (1,2,..,n) и (n, (n-1),…1). Так получается система двух линейных алгебраических уравнений, которой должен удовлетворять хотя бы один из $(2n)^{0.5n(n-1)-n}$ независимых наборов, содержащих определенные сочетания ±1 и 0.

Прямые проверки, проделанные для пространств с размерностями n =4 и n =5, показали, что несмотря на то, что рассматриваемая система двух уравнений является совместной неопределенной, решения указанного вида ей не удовлетворяют. Для бОльших значений размерностей n такую проверку осуществить не удалось, поскольку количество вариантов превысило 10^9 (для n =7 [1] потребовалось бы рассмотреть 10^{20}таких вариантов решений), что выходит за рамки возможностей обычного компьютера.

Тот же вопрос о возможности/не возможности построения векторного произведения можно рассмотреть несколько иначе, более логическим образом, а именно - анализируя построение таблицы векторных перемножений пар различных ортов. Существенными особенностями таких таблиц является их «кососимметрия»: $w_{ik} = [e_i * e_k] = -[e_k * e_i] = -w_{ki}$, нули на главной диагонали, а также наличие в каждой строке или столбце всех ортов за исключением имеющих номера соответствующей строки и столбца.

Для 3-мерного пространства такая таблица очевидна (табл. 1). Для 4-мерного пространства рассмотрим возможные значения элементов 5-го и 4-го столбцов аналогичной таблицы $\{w_{ik}\}$ для e_4 и e_3соответственно (без учета знаков $\pm$). Для w_{34}возможно e_2 или e_1; для w_{24} – e_1или e_3; для w_{14} – e_3или e_2; для w_{23} – e_4или e_1; для w_{13} – e_2или e_4. Тогда мы получим несовместимость w_{34}и w_{13} при первых вариантах значений, либо несовместимость

w_{23}и w_{13}при вторых вариантах значений, что доказывает принципиальную невозможность построения векторного произведения в 4-мерном пространстве.

Для 7-мерного пространства подобную таблицу (табл.1) построить удается, причем даже в нескольких вариантах, а, значит, в этом пространстве удается построить и векторное произведение (табл.2).

Таблица 1

Результаты векторного перемножения базисных ортов в 3-мерном пространстве

w_{ik}	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	-e_2
e_2	-e_3	0	e_1
e_3	e_2	-e_1	0

Таблица 2

Результаты векторного перемножения базисных ортов в 7-мерном пространстве

w_{ik}	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_4	e_7	-e_2	e_6	-e_5	e_3
e_2	-e_4	0	e_5	e_1	-e_3	e_7	e_1
e_3	-e_7	-e_5	0	e_6	e_2	-e_4	-e_2
e_4	e_2	-e_1	-e_6	0	e_7	e_3	-e_5
e_5	-e_6	e_3	-e_2	-e_7	0	e_1	e_4
e_6	e_5	-e_7	e_4	-e_3	-e_1	0	e_2
e_7	e_3	e_6	-e_1	e_5	-e_4	-e_2	0

Здесь следует остановиться на обсуждении работы [2], альтернативной к [1] по подходу и выводам, в которой разработана операция векторного произведения в векторных пространствах произвольных размерностей. В [2] за основу принимается векторное произведение $[\vec{A} * \vec{B}]$ для 3-мерного пространства, где первый из перемножаемых векторов $\vec{A}$ имеет только одну первую компоненту, второй $\vec{B}$ – две (первую и вторую) компоненты, а результат $[\vec{A} * \vec{B}]$, имеющий только третье измерение, «расщепляется» на (n-2) новых измерения как большая диагональ (n-2)-мерного куба. Тем самым все коэффициенты в правой части равенства (3) в соответствующем специальном базисе полагаются равными $\alpha_k = 1/\sqrt{n-2}$. Благодаря этому демонстрируется сохраняющаяся ортогональность векторного произведения обоим векторам. В общем случае векторных пространств произвольных размерностей для каждой конкретной пары перемножаемых векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ специально строится необходимое количество преобразований поворота системы координат, с помощью которых любой пример может быть сведен к рассмотренному случаю с изначально 3-мерным пространством, а полученный результат$[\vec{A} * \vec{B}]$ обратным преобразованием координат переводится в исходный n-мерный базис.

Заключение

Действительно, предложенный в [2] оригинальный и достаточно простой способ обеспечивает такие основные свойства, как линейность и антикоммутативность, а главное ортогональность получаемого вектора $[\vec{A} * \vec{B}]$ каждому из конкретных породивших его векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Однако такая «ручная» процедура для другой пары конкретных перемножаемых векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ требует строить совсем новые преобразования координат, и построение рассмотренных выше таблиц векторного перемножения ортов не требуется. Таким образом, не решаемая проблема построения векторного произведения при произвольной размерности векторного пространства решена в [2] благодаря иному толкованию обобщения условия (3) о векторном перемножении ортов.

Список использованных источников

1. Silagadze, Z. K. Multi-dimensional vector product / Z. K. Silagadze // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2002. – Vol. 35. – No 23. – P. 4949-4953. DOI 10.1088/0305-4470/35/23/310.
2. Попов, И. П. Векторное произведение двух векторов в четырехмерном евклидовом пространстве с учетом прикладных аспектов / И. П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2019. – Т. 7. – № 1. – С. 11-17. DOI 10.18503/2306-2053-2019-7-1-11-17.

Материал поступил в редакцию: 12.01.2021
Материал принят к публикации: 01.03.2021

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

ON THE VECTOR PRODUCT IN N-DIMENSIONAL SPACE

Pogodin I.E.

Abstract. The “selectivity” of classic vector product operation to the dimension of the corresponding vector space is under consideration. Simple ways are suggested to demonstrate its impracticability for arbitrary dimension. The purpose of the work is to find methodologically convenient ways to make it easier for students of mathematics in the language of basic concepts to make sure that the vector product is “selective” to the dimension of the vector space and to show also the role of model input requirements. As an alternative, a recently published method for obtaining vectors orthogonal to a specific pair of initial vectors for any dimension is discussed, and the conditions for its implementation are considered.

***Keywords*:** vector product, dimension of vector space, unit vectors, scalar product. A recently published method for obtaining vectors orthogonal to a particular pair of original vectors is discussed.

References

1. Silagadze, Z.K. (2002) *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23: 4949-4953.
2. Popov, I.P. (2019) *Matematicheskoe i programmnoe obespechenie sistem v promyshlennoj i social'noj sferah*, 1: 11-17.

ОБ АВТОРАХ:

Погодин Игорь Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, военно-морской инженерный институт, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: iepogodin@mail.ru.

ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Погодин, И.Е. О векторном произведении в n-мерном пространстве / И.Е. Погодин // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2021. – Т.9. – № 1. – С. 12-15.
DOI: 10.18503/2306-2053-2021-9-1-12-15.

Pogodin I.E. (2021) On the vector product in n-dimensional space. Software of systems in the industrial and social fields, 9 (1): 12-15. DOI: 10.18503/2306-2053-2021-9-1-12-15.