

УДК 537.21

DOI: 10.18503/2306-2053-2020-8-1-2-9

О НЕКОТОРЫХ РАСЧЕТАХ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Попов И.П.

Аннотация. При стремлении расстояния между электрическими зарядами к нулю потенциальная энергия электростатического поля стремится к бесконечности, что нехорошо. Цель исследования – исключить возможность развития бесконечно большой электростатической энергии. Актуальность работы обусловлена значительным повышением роли электростатической энергии в связи с началом массового производства электромобилей и необходимостью в этой связи развития теоретического обеспечения. Даны определения. Определение 1. Полная запасаемая энергия – это энергия системы или объекта, равная максимальной работе, которую система или объект может совершить, если ей или ему предоставить такую возможность. Определение 2. Условная реализуемая запасаемая энергия – это часть полной запасаемой энергии системы или объекта, равная работе, которую система или объект может совершить, ограниченная условием, исключающим возможность совершения системой или объектом максимальной работы, которую система или объект гипотетически может совершить. Определение 3. Условная нереализуемая запасаемая энергия – это часть полной запасаемой энергии системы или объекта, равная работе, которую система или объект не может совершить, ограниченная условием, исключающим возможность совершения системой или объектом максимальной работы, которую система или объект гипотетически может совершить.

Ключевые слова: полная, условная реализуемая, нереализуемая, запасаемая, электростатическая энергия, одноименные, разноименные заряды.

Введение

Потенциальная электростатическая энергия электрических зарядов равна

$$U = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (1)$$

При $r \rightarrow 0$ энергия стремится к бесконечности, что нехорошо. Возможные попытки спасти положение рассуждениями о невозможности достижения $r = 0$ в связи с конечными размерами заряженных объектов непродуктивны, поскольку считается, что, например, у электронов и позитронов размеров нет [1].

Цель исследования – исключить возможность развития бесконечно большой электростатической энергии.

Актуальность работы обусловлена значительным повышением роли электростатической энергии в связи с началом массового производства электромобилей и необходимостью в этой связи развития теоретического обеспечения.

Понятие о запасаемой энергии

Определение 1. Полная запасаемая энергия E_e – это энергия системы или объекта, равная максимальной работе, которую система или объект может совершить, если ей или ему предоставить такую возможность.

Замечание 1. Система или объект с нулевой полной запасаемой энергией не может совершить никакую работу.

Замечание 2. Система из двух разноименно заряженных шаров имеет нулевую полную запасаемую электростатическую энергию при совмещении их центров.

Последнее возможно, если шары являются взаимно проникающими, например, несплошными, в частности, выполненными в виде слоистых разъемов [2, 3]. Кроме того, заряды не должны перемещаться в телах шаров.

Замечание 3. Система из двух одноименно заряженных шаров имеет нулевую полную запасаемую электростатическую энергию при бесконечно большом расстоянии между шарами.

Потенциальная энергия пружины, энергия конденсатора, энергия соленоида, энергия покоя

$$P = \frac{k(\Delta l)^2}{2}, W = \frac{cU^2}{2}, W = \frac{LI^2}{2}, E_0 = mc^2 \quad (2)$$

и другие виды энергии [4-10] удовлетворяют определению 1.

Кинетическая энергия не включена в приведенный выше список не случайно. Для нее дело обстоит несколько сложнее, поскольку скорость зависит от произвольного выбора системы отсчета, в результате чего формульное значение энергии может сколь угодно (произвольно) возрасти без совершения какой-либо работы.

Полная запасаемая кинетическая энергия системы двух тел равна

$$E_{e1-2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v^2}{2}, \text{ при } m_1 \gg m_2 \quad E_{e1-2} \approx \frac{m_2 v^2}{2}. \quad (3)$$

Определение 2. Условная реализуемая запасаемая энергия E_r – это часть полной запасаемой энергии системы или объекта, равная работе, которую система или объект *может* совершить, ограниченная условием, исключающим возможность совершения системой или объектом максимальной работы, которую система или объект гипотетически может совершить.

Определение 3. Условная нереализуемая запасаемая энергия E_n – это часть полной запасаемой энергии системы или объекта, равная работе, которую система или объект *не может* совершить, ограниченная условием, исключающим возможность совершения системой или объектом максимальной работы, которую система или объект гипотетически может совершить.

Из определений 1-3 следует

$$E_r + E_n = E_e \quad (4)$$

Потенциальная гравитационная энергия тела, находящегося на высоте h над поверхностью Земли

$$P = mgh,$$

удовлетворяет определению 2.

Потенциальная электростатическая энергия разноименных зарядов (1) не удовлетворяет обоим определениям, поскольку такую работу сама система совершить не может.

Теорема 1. Запасаемая энергия всегда положительна.

Доказательство. Совершаемая системой работа равна уменьшению энергии системы (не обязательно потенциальной).

$$A = E_1 - E_2. \\ E_1 > E_2 \Rightarrow E_1 - E_2 > E_2 - E_2 \Rightarrow A = E > 0.$$

Теорема доказана.

Пусть далее $r \geq r_1 + r_2, r_2 \geq r_1$.

Разноименные заряды

Теорема 2. Условная реализуемая запасаемая электростатическая энергия двух взаимно не проникающих разноименно заряженных шаров равна

$$E_r = \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{4\pi\epsilon_0} \frac{r - (r_1 + r_2)}{r(r_1 + r_2)},$$

где r – расстояние между центрами шаров, r_1, r_2 – радиусы шаров.

Доказательство. Поскольку шары взаимно не проникающие, наибольшая работа, которую система может совершить, – это сблизить шары до соприкосновения, т.е. до расстояния между центрами равного $r_1 + r_2$.

$$E_r = A_c = P_1 - P_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r} - \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r_1 + r_2} \right) = \\ = \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{r} \right) = \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{4\pi\epsilon_0} \frac{r - (r_1 + r_2)}{r(r_1 + r_2)}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. При $r = r_1 + r_2$, т.е. при соприкосновении шаров условная реализуемая запасаемая электростатическая энергия равна нулю.

Теорема 3. Полная запасаемая электростатическая энергия двух разноименно заряженных шаров равна

$$E_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r} \quad (5)$$

Доказательство. Работа, совершаемая электростатическими силами при соединении бесконечно удаленных одноименно заряженных частиц в однородный шар радиуса r_1 (и r_2), по абсолютной величине равна энергии электростатического поля шара

$$E_1 = -A_1 = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{r_1} \quad (6)$$

$$E_2 = -A_2 = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2^2}{r_2} \quad (7)$$

Знак « \rightarrow » указывает на возрастание запасаемой энергии. Другими словами, работу совершают сторонние силы.

Работа, совершаемая электростатическими силами при соединении шаров из бесконечности до расстояния r между ними, равна

$$A_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r}$$

Система из двух шаров, центры которых совмещены, состоит из двух частей с разными плотностями заряда – ядра радиуса r_1 и оболочки с радиусами r_2 и r_1 .

Работа, совершаемая электростатическими силами при формировании ядра, равна

$$A_{01} = -\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \left(q_1 - q_2 \frac{r_1^3}{r_2^3} \right)^2 \quad (8)$$

Дифференциал работы, совершаемой электростатическими силами при формировании оболочки, находится следующим образом

$$dq = \frac{3q_2}{4\pi r_2^3} 4\pi r^2 dr = \frac{3q_2}{r_2^3} r^2 dr,$$

$$q_r = q_1 - q_2 \frac{r^3}{r_2^3},$$

$$dA = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_r dq}{\rho^2} d\rho.$$

Работа, совершаемая электростатическими силами при формировании оболочки, равна

$$\begin{aligned} A_{02} &= -\int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_r dq}{dr \rho^2} d\rho = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left(q_1 \frac{3q_2}{r_2^3} r^2 - q_2 \frac{r^3}{r_2^3} \frac{3q_2}{r_2^3} r^2 \right) dr \int_{\infty}^r \frac{d\rho}{\rho^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3q_1 q_2}{r_2^3} r^2 - \frac{3q_2^2}{r_2^6} r^5 \right) \frac{1}{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3q_1 q_2}{r_2^3} r - \frac{3q_2^2}{r_2^6} r^4 \right) dr = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q_1 q_2}{2r_2^3} r^2 - \frac{3q_2^2}{5r_2^6} r^5 - \frac{3q_1 q_2}{2r_2^3} r_1^2 + \frac{3q_2^2}{5r_2^6} r_1^5 \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q_1 q_2}{2r_2} - \frac{3q_2^2}{5r_2} - \frac{3q_1 q_2}{2r_2^3} r_1^2 + \frac{3q_2^2}{5r_2^6} r_1^5 \right). \end{aligned}$$

Работа, совершаемая электростатическими силами при формировании системы из двух шаров, равна

$$\begin{aligned} A_0 &= A_{01} + A_{02} = -\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \left(q_1 - q_2 \frac{r_1^3}{r_2^3} \right)^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q_1 q_2}{2r_2} - \frac{3q_2^2}{5r_2} - \frac{3q_1 q_2}{2r_2^3} r_1^2 + \frac{3q_2^2}{5r_2^6} r_1^5 \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3q_1^2}{5r_1} + \frac{6q_1 q_2 r_1^2}{5r_2^3} - \frac{3q_2^2 r_1^5}{5r_2^6} + \frac{3q_1 q_2}{2r_2} - \frac{3q_2^2}{5r_2} - \frac{3q_1 q_2}{2r_2^3} r_1^2 + \frac{3q_2^2}{5r_2^6} r_1^5 \right) = \\ &= -\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{q_2^2}{r_2} - \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r_2} \left(5 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Замечание 4. Пусть $r_2 = \alpha r_1$, $q_2 = \beta q_1$

$$A_0 = -\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{\beta^2 q_1^2}{\alpha r_1} + \frac{1}{2} \frac{q_1 \beta q_1}{\alpha r_1} \left(\frac{r_1^2}{\alpha^2 r_1^2} - 5 \right) \right] = -\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \left(q_1^2 + \frac{\beta^2 q_1^2}{\alpha} + \frac{\beta q_1^2}{2\alpha^3} - \frac{5\beta q_1^2}{2\alpha} \right),$$

$$q_1^2 + \frac{\beta^2 q_1^2}{\alpha} + \frac{\beta q_1^2}{2\alpha^3} - \frac{5\beta q_1^2}{2\alpha} = 0,$$

$$2\alpha^3 + 2\alpha^2 \beta^2 + \beta - 5\alpha^2 \beta = 0,$$

$$\beta^2 - \frac{1}{2} (5 - \alpha^{-2}) \beta + \alpha = 0,$$

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{4} (5 - \alpha^{-2}) \pm \sqrt{\frac{1}{16} (5 - \alpha^{-2})^2 - \alpha}.$$

Это решение показывает, при каких соотношениях α и β работа A_0 положительна, отрицательна или равна нулю.

Замечание 5. $E_0 = -A_0$.

Замечание 6. При $r_1 = r_2$

$$E_0 = -A_0 = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{q_2^2}{r_1} + \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r_1} \left(\frac{r_1^2}{r_1^2} - 5 \right) \right] = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_1 - q_2)^2}{r_1},$$

что согласуется с (6), (7) и (8).

Замечание 7. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$E_0 = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_1 - q_1)^2}{r_1} = 0.$$

Замечание 8. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$A_{\infty 0} = 2E_1 - E_0 = 2E_1 \quad (9)$$

Очевидно, что искомая полная запасаемая электростатическая энергия определяется как следующая разность

$$\begin{aligned} E_e = A_e = A_0 - A_1 - A_2 - A_r = \\ = -\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{q_2^2}{r_2} + \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r_2} \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 5 \right) \right] + \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{r_1} + \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2^2}{r_2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r} = \\ = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1. При $r = \infty$

$$E_{e\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_2} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \quad (10)$$

Следствие 3.2. При $r = r_1 + r_2$, т.е. при соприкосновении шаров полная запасаемая электростатическая энергия двух разноименно заряженных шаров равна условной нереализуемой запасаемой электростатической энергии

$$E_{e1-2} = E_{n1-2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r_1 + r_2} \quad (11)$$

Это вытекает из (4) и следствия 2.1.

Следствие 3.3. $E_e - E_{e1-2} = E_r$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r_1 + r_2} = \\ = \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{4\pi\epsilon_0} \frac{r - (r_1 + r_2)}{r(r_1 + r_2)}. \end{aligned}$$

Следствие 3.4. При $r_1 = r_2$, $r = 2r_1$

$$E_{e1-1} = E_{n1-1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_1^2} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{2r_1} = 0,7 \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad (12)$$

Следствие 3.5. При $r_1 = r_2$, $r = \infty$

$$E_{e\infty} = 1,2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r_1} \quad (13)$$

Следствие 3.6. При $r_1 = r_2$, $r = \infty$, $q_1 = q_2$

$$E_{e\infty} = 1,2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_1}{r_1} = 2 \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{r_1} = 2E_1 \quad (14)$$

Эта энергия равна работе, совершаемой электростатическими силами при сближении двух идентичных разноименно заряженных шаров из бесконечности до нулевого расстояния между их центрами.

При бесконечном расстоянии между зарядами полная запасаемая электростатическая энергия двух разноименно заряженных шаров максимальна, в отличие от потенциальной энергии, которая бездоказательно принимается равной нулю.

Следствие 3.7. При $r = 0$

$$E_{e0} = 0,$$

в отличие от потенциальной энергии, которая принимает бесконечно большое значение, что не имеет никакого смысла и прямо указывает на несправедливость формулы.

Следствие 3.8.

$$A_{\infty 1-1} = E_{e\infty} - E_{n1-1} = 1,2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r_1} - 0,7 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r_1} = 0,5 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm} q_{2\mp}}{r_1} \quad (15)$$

Следствие 3.9. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$A_{\infty 1-1} = \frac{5}{6} E_1 \quad (16)$$

Одноименные заряды

Теорема 4. Полная запасаемая электростатическая энергия двух одноименно заряженных разделенных шаров равна

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm}q_{2\pm}}{r} \quad (17)$$

Она совпадает с потенциальной энергией одноименных зарядов вне пространства шаров.

Доказательство тривиально.

Следствие 4.1. При $r = r_1 + r_2$, т.е. при соприкосновении шаров полная запасаемая электростатическая энергия двух одноименно заряженных шаров равна

$$E_{e1-2} = E_{r1-2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1\pm}q_{2\pm}}{r_1+r_2}.$$

Следствие 4.2. При $r_1 = r_2$

$$E_{e1-1} = E_{r1-1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r_1+r_1} = 0,5 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r_1}.$$

(Совпадает с (15))

Следствие 4.3. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$E_{e1-1} = E_{r1-1} = \frac{5}{6} E_1.$$

(Совпадает с (16))

Теорема 5. Полная запасаемая электростатическая энергия двух одноименно заряженных шаров при нулевом расстоянии между их центрами равна

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r_2} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \quad (18)$$

(Совпадает с (10))

Доказательство. Применительно к рассматриваемому случаю аналоги выражений, полученных при доказательстве теоремы 3, принимают вид:

$$A_{01} = -\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \left(q_1 + q_2 \frac{r_1^3}{r_2^3} \right)^2,$$

$$q_r = q_1 + q_2 \frac{r^3}{r_2^3},$$

$$dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_r dq}{\rho^2} d\rho,$$

$$\begin{aligned} A_{02} &= \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_r dq}{dr \rho^2} d\rho = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left(q_1 \frac{3q_2}{r_2^3} r^2 + q_2 \frac{r^3}{r_2^3} \frac{3q_2}{r_2^3} r^2 \right) dr \int_{\infty}^r \frac{d\rho}{\rho^2} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3q_1q_2}{r_2^3} r^2 + \frac{3q_2^2}{r_2^6} r^5 \right) \frac{1}{r} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3q_1q_2}{r_2^3} r + \frac{3q_2^2}{r_2^6} r^4 \right) dr = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q_1q_2}{2r_2^3} r_2^2 + \frac{3q_2^2}{5r_2^6} r_2^5 - \frac{3q_1q_2}{2r_2^3} r_1^2 - \frac{3q_2^2}{5r_2^6} r_1^5 \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q_1q_2}{2r_2} + \frac{3q_2^2}{5r_2} - \frac{3q_1q_2}{2r_2^3} r_1^2 - \frac{3q_2^2}{5r_2^6} r_1^5 \right), \\ A_0 &= A_{01} + A_{02} = -\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \left(q_1 + q_2 \frac{r_1^3}{r_2^3} \right)^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q_1q_2}{2r_2} + \frac{3q_2^2}{5r_2} - \frac{3q_1q_2}{2r_2^3} r_1^2 - \frac{3q_2^2}{5r_2^6} r_1^5 \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q_1^2}{5r_1} + \frac{6q_1q_2r_1^2}{5r_2^3} + \frac{3q_2^2r_1^5}{5r_2^6} + \frac{3q_1q_2}{2r_2} + \frac{3q_2^2}{5r_2} - \frac{3q_1q_2}{2r_2^3} r_1^2 - \frac{3q_2^2}{5r_2^6} r_1^5 \right) = \\ &= -\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{q_2^2}{r_2} + \frac{1}{2} \frac{q_1q_2}{r_1} \left(5 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Замечание 9. $\beta_{1,2} = \frac{1}{4} (\alpha^{-2} - 5) \pm \sqrt{\frac{1}{16} (\alpha^{-2} - 5)^2 - \alpha}$.

Замечание 10. $E_0 = -A_0$.

Замечание 11. При $r_1 = r_2$

$$E_0 = -A_0 = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{q_2^2}{r_1} + \frac{1}{2} \frac{q_1q_2}{r_1} \left(5 - \frac{r_1^2}{r_1^2} \right) \right] = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_1+q_2)^2}{r_1},$$

что согласуется с (6), (7) и (8).

Замечание 12. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$E_0 = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_1+q_1)^2}{r_1} = 4 \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{r_1} = 4E_1.$$

Замечание 13. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$A_{0\infty} = E_0 - 2E_1 = 2E_1.$$

(Совпадает с (9)).

Очевидно, что искомая полная запасаемая электростатическая энергия двух одноименно заряженных шаров при нулевом расстоянии между их центрами определяется как следующая разность

$$\begin{aligned} E_e &= E_0 - E_1 - E_2 = \\ &= \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{q_2^2}{r_2} + \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r_2} \left(5 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right] - \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{r_1} - \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2^2}{r_2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_2} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 5.1. При $r_1 = r_2$

$$E_e = 1,2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_1}.$$

(Совпадает с (13)).

Следствие 5.2. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$E_e = 1,2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_1}{r_1} = 2 \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{r_1} = 2E_1.$$

(Совпадает с (14))

Эта энергия равна работе, совершаемой электростатическими силами при удалении двух идентичных одноименно заряженных шаров от нулевого расстояния между их центрами до бесконечности.

При нулевом расстоянии между центрами зарядов полная запасаемая электростатическая энергия двух одноименно заряженных шаров максимальна, но конечна, в отличие от потенциальной энергии, которая принимает бесконечно большое значение.

Следствие 5.3. Условная нереализуемая запасаемая энергия двух разноименно заряженных шаров равна

$$E_{n1-2} = E_e - E_{r1-2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_2} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_1 + r_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(1,5 \frac{1}{r_2} - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^3} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right).$$

(Совпадает с (11)). Это вытекает из (4)

Следствие 5.4. При $r_1 = r_2$, $r = 2r_1$

$$E_{n1-1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_1^2} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{2r_1} = 0,7 \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1}.$$

(Совпадает с (12)).

Заключение

Энергетика разноименных зарядов имеет различия и сходства с энергетикой одноименных зарядов.

Минимальная энергия поля одноименных идентичных зарядов равна максимальной энергии поля разноименных зарядов

$$E_{min \infty \pm\pm} = E_{max \infty \pm\mp} = 2E_1.$$

Максимальная энергия поля одноименных идентичных зарядов вдвое превышает максимальную энергию поля разноименных зарядов

$$E_{max 0 \pm\pm} = 2E_{max \infty \pm\mp} = 4E_1.$$

В то же время работа электростатического поля по сближению разноименных идентичных зарядов из бесконечности до совмещения их центров равна работе поля по противоположному разнесению одноименных зарядов

$$A_{\infty 0 \pm\mp} = A_{0 \infty \pm\pm} = 2E_1.$$

Для одноименных зарядов вне их внутреннего пространства полная запасаемая электростатическая энергия совпадает с потенциальной энергией.

Однако полная запасаемая электростатическая энергия при совмещении центров одноименно заряженных шаров существенно превышает потенциальную энергию соприкасающихся шаров

$$\frac{E_{0e}}{E_{e1-1}} = \frac{2E_1}{\frac{5}{6}E_1} = 2,4.$$

Строго говоря, под потенциальной энергией понимают величину

$$П = C - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r},$$

где C – аддитивная постоянная, которая принята равной нулю, что оправдано для одноименных зарядов и совершенно бездоказательно обобщено на разноименные заряды, что не дает представления о запасенной энергии в системе разноименных зарядов.

Если теперь уже не бездоказательно для разноименных зарядов принять

$$C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \left(1,5 - 0,3 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \quad (19)$$

то потенциальная энергия разноименных зарядов превратится в полную запасаемую электростатическую энергию (5), что поднимет ее смысловой статус до уровня выражений (2), (3), (17) и (18).

Аддитивная постоянная (19) представляет собой полную запасаемую электростатическую энергию двух одноименно заряженных шаров при нулевом расстоянии между их центрами (18).

Полученная формула для полной запасаемой электростатической энергии разноименных зарядов может использоваться в качестве формулы для их потенциальной энергии.

Главным недостатком существующей формулы потенциальной энергии является бесконечно большое возрастание энергии при $r \rightarrow 0$. Этого недостатка лишены полученные формулы для запасаемой электростатической энергии.

Список использованных источников

1. Попов, И.П. Размер электрона с учетом спина // Инженерная физика. – 2016. – № 9. – С. 45-46.
2. Попов, И.П. Комбинированные векторы и магнитный заряд // Прикладная физика и математика. – 2018. – № 6. – С. 12-20. DOI: 10.25791/pfim.06.2018.329
3. Попов, И.П. Математическое моделирование формального аналога электромагнитного поля // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 4. – С. 36-60.
4. Ячиков, И.М. Анализ эффективности использования принудительного охлаждения графитированных электродов для снижения их расхода в электродуговых печах / И.М. Ячиков, И.В. Портнова, М.В. Быстров // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2019. – №1. – С. 24-29. DOI: 10.18503/2306-2053-2019-7-1-24-29.
5. Математическое обеспечение способа оптимального управления энергетическим режимом электродуговых агрегатов / Б.Н. Парсункин [и др.] // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2017. – №1. – С. 8-15.
6. Дубский, Г.А. Физико-математическое моделирование процесса переноса заряда в металле при его нагревании и деформации / Г.А. Дубский, Л.Г. Егорова // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2017. – №1. – С. 16-23.
7. Николаев, А.А. Применение математической модели дуговой печи для анализа мгновенных значений напряжения дуги при наличии реальных сигналов тока дуги и фазного напряжения / А.А. Николаев, П.Г. Тулупов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2016. – №2. – С. 2-10.

Материал поступил в редакцию: 11.02.2020

Материал принят к публикации: 01.12.2020

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

ABOUT SOME CALCULATIONS OF ELECTROSTATIC FIELD ENERGY

Popov I.P.

Abstract. When the distance between electric charges tends to zero, the potential energy of the electrostatic field tends to infinity, which is not good. The purpose of the study is to exclude the possibility of developing infinitely large electrostatic energy. The relevance of the work is due to a significant increase in the role of electrostatic energy in connection with the start of mass production of electric vehicles and the need for the development of theoretical support in this regard. Definitions are given. Definition 1. The total stored energy is the energy of a system or an object equal to the maximum work that a system or object can do if it or he is given such an opportunity. Definition 2. The conditional realized stored energy is a part of the total stored energy of a system or object equal to the work that the system or object can do, limited by the condition that excludes the possibility of the system or object performing the maximum work that the system or object can hypothetically perform. Definition 3. Conditional unrealizable stored energy is a part of the total stored energy of a system or object equal to the work that the system or object cannot perform, limited by the condition that excludes the possibility of the system or object performing the maximum work that the system or object can hypothetically perform.

Keywords: full, conditional realized, unrealized, stored, electrostatic energy, homonymous, unlike charges.

References

1. Popov, I.P. (2016) *Engineering Physics*, 9: 45-46.
2. Popov, I.P. (2018) *Applied Physics and Mathematics*, 6: 12-20.

3. Popov, I.P. (2016) *Applied Mathematics and Management Issues*, 4: 36-60.
4. Yachikov, I.M., Portnova, I.V., Bystrov, M.V. (2019) *Software of systems in the industrial and social fields*, 1: 24-29.
5. Parsunkin, B.N., Akhmetov, U. B., Andreev, S. M., Chistyakov, D. V. (2017) *Software of systems in the industrial and social fields*, 1: 8-15.
6. Dubsky, G.A., Egorova, L.G. (2016) *Software of systems in the industrial and social fields*, 1: 16-23.
7. Nikolaev, A.A., Tulupov, P.G. (2016) *Software of systems in the industrial and social fields*, 2: 2-10.

ОБ АВТОРАХ:

Попов Игорь Павлович – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета. Email: ip.porow@yandex.ru

ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Попов, И.П. О некоторых расчетах энергии электростатического поля / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2020. – Т.8. – № 1. – С. 2-9. DOI: 10.18503/2306-2053-2020-8-1-2-9.

Popov I.P. (2020) About some calculations of electrostatic field energy. *Software of systems in the industrial and social fields*. 8 (1): 2-9. DOI: 10.18503/2306-2053-2020-8-1-2-9.
