

## СИНТЕЗ И АНАЛИЗ МУЛЬТИИНЕРТНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Попов И.П.

**Аннотация.** Отмечено, что свободные гармонические колебания классического маятника обусловлены взаимным преобразованием кинетической энергии груза в потенциальную энергию пружины. Разработаны осцилляторы с другим характером энергообмена, например, преобразованием кинетической энергии груза в энергию магнитного поля соленоида или энергию электрического поля конденсатора. Все эти колебательные системы и подобные им явились предпосылкой создания биинертного осциллятора, в котором ускорение одного груза происходит за счет торможения другого, т.е. происходит обмен только кинетическими энергиями. Особенностью мультиинертного осциллятора является то, что частота его свободных колебаний не фиксирована и определяется преимущественно начальными условиями. Эта особенность может оказаться весьма полезной для технических приложений, например, для самонейтрализации механической реактивной (инерционной) мощности.  $n$ -угольник, образованный инертными телами, осуществляет сложное движение – орбитальное вращение вокруг центра координат и спиновое вращение вокруг своей оси, проходящей через центр  $n$ -угольника. При этом каждый груз совершает линейные гармонические колебания вдоль своей направляющей. При расположении направляющих грузов не в виде звезды, а параллельно друг другу углы между соответствующими кривошипами необходимо составят  $360/n$  градусов.

**Ключевые слова:** осциллятор, инертный, гармонический, реактивность, пространственный сдвиг, фазовый сдвиг, кинетическая энергия.

### Введение

Свободные гармонические колебания классического маятника обусловлены взаимным преобразованием кинетической энергии груза в потенциальную энергию пружины [1, 2]. Разработаны осцилляторы с другим характером энергообмена, например, преобразованием кинетической энергии груза в энергию магнитного поля соленоида или энергию электрического поля конденсатора. Все эти колебательные системы и подобные им [3–8] явились предпосылкой создания биинертного осциллятора, в котором ускорение одного груза происходит за счет торможения другого, т.е. происходит обмен только кинетическими энергиями.

*Целью работы* является моделирование мультиинертного осциллятора.

### Синтез колебательной системы

Пусть в плоскости  $Z$  имеются не две, а  $n$  координатных осей  $0x_1, 0x_2, \dots, 0x_n$ , образующих центрально симметричную звезду с центром в точке  $O$ . Угол между осями составляет  $\frac{\pi}{n}$ . Из начала координат  $O$  отложен вектор  $R$ . Направление вектора произвольное.  $R \subset Z$ .

*Теорема 1.*

1. Отрезки, соединяющие координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  вектора  $R$  в системе координат  $0x_1, 0x_2, \dots, 0x_n$  образуют правильный  $n$ -угольник.

2. Размер  $n$ -угольника не зависит от ориентации вектора  $R$ .

3. Середина вектора  $R$  совмещена с центром  $n$ -угольника.

*Доказательство.* Вектор  $R$  имеет координаты:

$$x_1 = R \cos \phi \tag{1}$$

$$x_2 = R \cos \left( \frac{\pi}{n} - \phi \right),$$

$$x_3 = R \cos \left( \frac{2\pi}{n} - \phi \right),$$

.....

$$x_i = R \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \phi \right],$$

.....

$$x_n = R \cos \left[ \frac{(n-1)\pi}{n} - \phi \right] \tag{2}$$

В соответствии с теоремой косинусов

$$\begin{aligned} (x_i x_{i+1}) &= R^2 \left\{ \cos^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \phi \right] + \cos^2 \left( \frac{i\pi}{n} - \phi \right) - 2 \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \phi \right] \cos \left( \frac{i\pi}{n} - \phi \right) \cos \frac{\pi}{n} \right\} = \\ &= R^2 \left\{ \cos^2 \left( \frac{i\pi}{n} - \phi - \frac{\pi}{n} \right) + \left( \cos \frac{i\pi}{n} \cos \phi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \phi \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[ \cos \frac{\pi}{n} \left( \cos \frac{i\pi}{n} \cos \phi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \phi \right) + \sin \frac{\pi}{n} \left( \sin \frac{i\pi}{n} \cos \phi - \cos \frac{i\pi}{n} \sin \phi \right) \right] \right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( \cos \frac{i\pi}{n} \cos \phi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \phi \right) \cos \frac{\pi}{n} \Big) = \\
 = & R^2 \left( \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \phi + \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \phi + \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \phi + \right. \\
 & + \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \phi + 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos \phi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \phi + \\
 & + 2 \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos^2 \phi \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} - 2 \cos \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos \phi \sin \frac{\pi}{n} \sin \phi + \\
 & + 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin \phi \sin \frac{\pi}{n} \cos \phi - 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \sin^2 \phi \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} - \\
 & - 2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \cos \phi \cos \frac{i\pi}{n} \sin \phi + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \phi + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \phi + \\
 & + 2 \cos \frac{i\pi}{n} \cos \phi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \phi - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \phi - \\
 & - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \sin \phi \cos \frac{i\pi}{n} \cos \phi - 2 \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \cos^2 \phi \cos \frac{i\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} + \\
 & + 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \sin \phi \cos \phi \cos \frac{\pi}{n} - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos \phi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \phi - \\
 & \left. - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \phi - 2 \sin \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \cos \phi \sin \phi \cos \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \sin^2 \phi \sin \frac{i\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) = \\
 = & R^2 \left[ \cos^2 \phi \left( \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \right. \\
 & \left. + \sin^2 \phi \left( \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
 = & R^2 \left[ \cos^2 \phi \left( \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \sin^2 \phi \left( \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
 = & R^2 \left[ \cos^2 \phi \sin^2 \frac{\pi}{n} \left( \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \sin^2 \phi \sin^2 \frac{\pi}{n} \left( \cos^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
 = & R^2 \left( \cos^2 \phi \sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \phi \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) = \\
 = & R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}.
 \end{aligned}$$

Из этого следует, что все стороны  $n$ -угольника одинаковы по длине. При этом их длина не является функцией  $\phi$ , т.е. не зависит от ориентации вектора  $\mathbf{R}$ .

Далее середина вектора  $\mathbf{R}$  обозначается  $r$ . В соответствии с теоремой косинусов

$$(x_i r)^2 = R^2 \left\{ \cos^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \phi \right] + \frac{1}{4} - 2 \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \phi \right] \frac{1}{2} \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \phi \right] \right\} = \frac{R^2}{4}.$$

Из этого следует, что все отрезки, связывающие точку  $r$  с вершинами  $n$ -угольника, имеют одинаковую длину. Это означает, что  $n$ -угольник является правильным и точка  $r$  совпадает с его центром.

Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет определить конфигурацию мультиинертного осциллятора, упрощенная схема которого показана на рис.

Для целей теоремы 1 вершины правильного многоугольника рассматривались в одной плоскости  $Z$ . Для инженерных целей траектории грузов не должны пересекаться, поэтому грузы и их направляющие расположены в параллельных плоскостях подобно цилиндрам, шатунам и кривошипам в кривошипно-

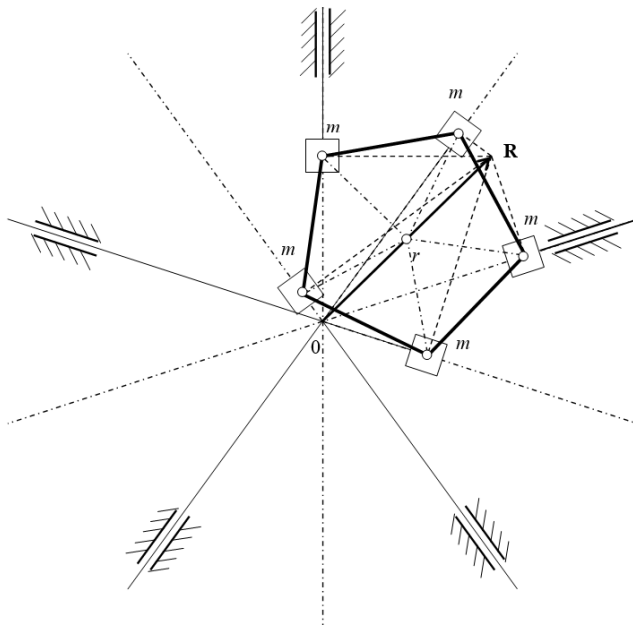


Рис. Мультиинертный осциллятор

шатунном механизме. Для обеспечения этого, например, стержень  $x_1x_3$  закреплен «сверху» (ближе) груза, находящегося в координате  $x_1$ , а стержень  $x_1x_4$  – «снизу» (далее, на рисунке не показано).

**Анализ колебательной системы**

Внешние силы к системе не приложены. Скорости инертных тел массой  $m$  каждое определяются как производные их координат. В соответствии с (1)-(2)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -R \sin \phi \frac{d\phi}{dt}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= R \sin \left( \frac{\pi}{n} - \phi \right) \frac{d\phi}{dt}, \\ \frac{dx_3}{dt} &= R \sin \left( \frac{2\pi}{n} - \phi \right) \frac{d\phi}{dt}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_i}{dt} &= R \sin \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \phi \right] \frac{d\phi}{dt}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= R \sin \left[ \frac{(n-1)\pi}{n} - \phi \right] \frac{d\phi}{dt}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы в системе происходили свободные гармонические колебания, необходимо, чтобы ее полная энергия оставалась постоянной. В данном случае полная энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} mR^2 \left\{ \sin^2 \phi + \sin^2 \left( \frac{\pi}{n} - \phi \right) + \dots + \sin^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} - \phi \right] + \dots + \sin^2 \left[ \frac{(n-1)\pi}{n} - \phi \right] \right\} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2. \tag{3}$$

*Теорема 2.* При  $n \geq 2$  имеет место выражение:

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} \pm \phi \right] = \frac{n}{2} \tag{4}$$

Доказательство

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \sin^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} \pm \phi \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[ \frac{(i-1)2\pi}{n} \pm 2\phi \right] \right\} = \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\phi \sum_{i=1}^n \cos \frac{(i-1)2\pi}{n} \mp \frac{1}{2} \sin 2\phi \sum_{i=1}^n \sin \frac{(i-1)2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Если вдоль координатных осей  $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n$  отложить единичные векторы, то их сумма вследствие центральной симметрии будет равна нулю. Следовательно, сумма проекций этих единичных векторов на любую из осей  $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n$  также будет нулевой. По этой причине последние две суммы тождественно равны нулю.

Теорема доказана.

*Следствие 1.* При  $n = 2$  выражение (4) приобретает известный вид:

$$\sin^2 \phi + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} + \phi \right) = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \frac{2}{2} = 1.$$

Точно также доказывается

*Теорема 3.* При  $n \geq 2$  имеет место выражение:

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{n} \pm \phi \right] = \frac{n}{2}$$

С учетом теоремы 2 (выражение (4)) полная (она же кинетическая) энергия (3) равна

$$T = \frac{1}{4} nmR^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = const.$$

Из последнего выражения следует

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= const. \\ \phi &= C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Начальные условия для фазы и угловой скорости:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi_0, \\ \frac{d\phi}{dt}(0) &= \omega_0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} C_2 &= \phi_0, \\ C_1 &= \omega_0. \end{aligned}$$

Формулы для координат грузов (1)–(2) принимают вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos(\omega_0 t + \phi_0), \\ x_2 &= R \cos\left(\frac{\pi}{n} - \omega_0 t - \phi_0\right), \\ x_3 &= R \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \omega_0 t - \phi_0\right), \\ &\dots\dots\dots \\ x_i &= R \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \omega_0 t - \phi_0\right], \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= R \cos\left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \omega_0 t - \phi_0\right]. \end{aligned}$$

Начальные условия для перемещения и линейной скорости:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, \\ \frac{dx_1}{dt}(0) &= v_{10}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \cos \phi_0 &= \frac{x_{10}}{R}, \\ \phi_0 &= \arccos \frac{x_{10}}{R} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}}, \\ -R\omega_0 \sin(\omega_0 0 + \phi_0) &= v_{10}, \\ \omega_0 &= -\frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

### Заключение

Инертные тела массой  $m$  каждое осуществляют гармонические колебания, обусловленные взаимным обменом кинетической энергией. Потенциальная энергия пружин для этого не требуется.

Колебания тел являются свободными.

Особенностью мультиинертного осциллятора является то, что частота его свободных колебаний (5) не фиксирована и определяется преимущественно начальными условиями. Эта особенность может оказаться весьма полезной для технических приложений, например, для самонейтрализации механической реактивной (инерционной) мощности.

$n$ -угольник  $x_1, x_2, \dots, x_n$  осуществляет сложное движение – орбитальное вращение вокруг центра координат  $O$  и спиновое вращение вокруг своей оси, проходящей через центр  $r$ .

При этом каждый груз совершает *линейные гармонические колебания* вдоль своей направляющей. Его координата изменяется от  $+R$  до  $-R$ .

При расположении направляющих грузов не в виде звезды, а параллельно друг другу углы между соответствующими кривошипами необходимо составят  $360/n$  градусов.

Мультиинертный осциллятор имеет перспективу промышленного применения. Некоторые вибромашины, в частности, сортировальные имеют более трех массивных подвижных рабочих органов [9, 10]. Построение их по схеме мультиинертного осциллятора позволит существенно сократить потребление энергии, которая в этом случае *не будет* расходоваться на сообщение массивным рабочим органам колебательных движений (около 90% полной мощности), а будет направлена только на компенсацию трения и на совершение полезной работы.

### Список использованных источников

1. Попов, И.П. Две теоремы для механических резонансов // МиПОС. – 2019. – Т.7. – № 2. – С. 2-7. DOI: 10.18503/2306-2053-2019-7-2-2-7.
2. Попов, И.П. Применение символического (комплексного) метода для расчета сложных механических систем при гармонических воздействиях // Прикладная физика и математика. – 2019. – № 4. – С. 14-24. DOI: 10.25791/pfim.04.2019.828.
3. Крайнова, Л.Н. Колебания цилиндра со смещенным центром тяжести на жестком основании / Л.Н. Крайнова, А.И. Муницын, М.А. Муницына // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 2. – С. 47-50.
4. Муртазина, С.А. Главные асимптотики вынужденных колебаний однопараметрических динамических систем // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2016. – № 2. – С. 17-20.

5. Юмагулов, М.Г. Алгоритмы приближенного исследования задач о синхронизации периодических колебаний нелинейных динамических систем / М.Г. Юмагулов, Э.С. Суюндукова // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2013. – № 1. – С. 26-32.
6. Юмагулов, М.Г. Задача о субгармонических колебаниях уравнения Дуффинга / М.Г. Юмагулов, Э.С. Суюндукова // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2012. – № 2. – С. 125-129.
7. Ибрагимова, Л.С. Синхронизация субгармонических колебаний уравнения Матье // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2012. – № 2. – С. 129-132.
8. Муртазина, С.А. Расчет устойчивости вынужденных колебаний многопараметрических динамических систем // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2011. – № 1-1. – С. 198-203.
9. Попов, И.П. Автобалансировка вибрационных машин / И.П. Попов, С.Ю. Кубарева // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. – 2018. – Т. 16. – № 3. – С. 140-144. <https://doi.org/10.18503/1995-2732-2018-16-3-140-144>
10. Гудушаури, Э.Г. Применение вибрационной технологии в сельском хозяйстве // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 3. – С. 145-148.

Материал поступил в редакцию: 15.09.2020

Материал принят к публикации: 01.12.2020

## INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

### SYNTHESIS AND ANALYSIS OF MULTI-INERT OSCILLATOR

*Popov I.P.*

**Abstract.** It is noted that the free harmonic vibrations of a classical pendulum are due to the mutual conversion of the kinetic energy of the load into the potential energy of the spring. Oscillators with a different nature of energy exchange have been developed, for example, by converting the kinetic energy of a load into the energy of a magnetic field of a solenoid or the energy of an electric field of a capacitor. All these oscillatory systems and the like were a prerequisite for the creation of a biinert oscillator, in which the acceleration of one load occurs due to the braking of another, i.e. only kinetic energies are exchanged. A feature of a multi-inert oscillator is that the frequency of its free oscillations is not fixed and is determined mainly by the initial conditions. This feature can be very useful for technical applications, for example, for self-neutralization of mechanical reactive (inertial) power. n-gon, formed by inert bodies, carries out complex motion - orbital rotation around the center of coordinates and spin rotation around its axis passing through the center of the n-gon. Moreover, each load performs linear harmonic oscillations along its guide. With the arrangement of the guiding weights not in the form of a star, but in parallel to each other, the angles between the corresponding cranks must be  $360/n$  degrees.

**Keywords:** oscillator, inert, harmonic, reactivity, spatial shift, phase shift, kinetic energy.

#### References

1. Popov, I.P. (2019) *Software of systems in the industrial and social fields*, 2: 2–7.
2. Popov, I.P. (2019) *Applied Physics and Mathematics*, 2: 14–24.
3. Kraynova, L.N., Munitsyn, A.I., Munitsyna, M.A. (2018) *Problems of mechanical engineering and automation*, 2: 47–50.
4. Murtaзина, S.A. (2016) *Software of systems in the industrial and social fields*, 2: 17–20.
5. Yumagulov, M.G., Suyundukova, E.S. (2013) *Software of systems in the industrial and social fields*, 1: 26–32.
6. Yumagulov, M.G., Suyundukova, E.S. (2012) *Software of systems in the industrial and social fields*, 2: 125–129.
7. Ibragimova, L.S. (2012) *Software of systems in the industrial and social fields*, 2: 129–132.
8. Murtaзина, S.A. (2011) *Software of systems in the industrial and social fields*, 1-1: 198–203.
9. Popov, I.P., Kubareva, S.Yu. (2018) *Bulletin of Magnitogorsk State Technical University. G.I. Nosova*, 3: 140–144.
10. Gudushauri, E.G. (2018) *Problems of mechanical engineering and automation*, 3: 145–148.

#### ОБ АВТОРАХ:

**Попов Игорь Павлович** – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета. Email: ip.popov@yandex.ru

#### ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Попов, И.П. Синтез и анализ мультиинертного осциллятора / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2020. – Т.8. – № 1. – С. 10-14.  
DOI: 10.18503/2306-2053-2020-8-1-10-14.

*Popov I.P. (2020) Synthesis and analysis of multi-inert oscillator. Software of systems in the industrial and social fields. 8 (1): 10-14. DOI: 10.18503/2306-2053-2020-8-1-10-14.*