МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 514.742.24

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С УЧЕТОМ ПРИКЛАДНЫХ АСПЕКТОВ

Попов И.П.

Аннотация. Целью работы является определение векторного произведения двух векторов $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ в четырехмерном евклидовом пространстве. Вводится понятие -расщепления и симметричного m-расщепления базисных векторов, под которыми понимается трансформация R^n в R^{n+m-1} путем замены $\boldsymbol{e}_i$ на m векторов $\boldsymbol{e}_{i1}, \dots, \boldsymbol{e}_{ij}, \dots, \boldsymbol{e}_{im}$, ортогональных друг другу и всем другим базисным векторам исходного базиса. Решается некоторым образом обратная задача – при известном векторном произведении определение координат всех трех векторов в R^n. Устанавливается условие, в соответствии с которым векторное произведение $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ в R^4 лежит на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на 2-плоскость, перпендикулярную векторам а и $\boldsymbol{b}$. Результаты работы могут использоваться при решении многомерных задач физики и техники.
Ключевые слова: градиент, функция, частная производная, интеграл, переменная.

Введение

В релятивистской электродинамике рассматривается четырехмерное пространство Минковского. Электромагнитная волна в этом пространстве также имеет две составляющие: вектор $\mathbf{e}$ напряженности электрического поля и вектор $\boldsymbol{h}$ напряженности магнитного поля [1]. Вектор Умова-Пойнтинга $\boldsymbol{u}$, характеризующий движение энергии, по определению равен векторному произведению $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}]$. Однако до сих пор для его нахождения приходилось прибегать к лоренцевой калибровке, которая сокращает число компонент векторов $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{u}$ до трех, но в то же время порождает неоднозначность в определении векторов, которую приходится преодолевать путем введения дополнительных условий. Полученный в настоящей работе результат позволяет устанавливать векторное произведение $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}]$ непосредственно в R^4, избегая неоднозначности и дополнительных условий.

Многомерная геометрия в настоящее время широко применяется и в других разделах физики для представления уравнений с несколькими неизвестными, функций нескольких переменных и систем с несколькими степенями свободы, а также собственных векторов и инвариантных подпространств линейных операторов в квантовой механике [2–4]. Пополнение арсенала ее средств векторным произведением двух векторов создает дополнительные возможности для теоретических исследований. Целью работы является определение векторного произведения двух векторов $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ в четырехмерном евклидовом пространстве.

В исследованиях литературе широко используется скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ в многомерном пространстве. Оно является обобщением скалярного произведения для двух и трехмерного случаев [5–10]. Такое обобщение не представляло трудности, поскольку результат скалярного произведения в пространстве любой размерности однозначен. Иначе обстоит дело с векторным произведением, и бесконечность возможных решений является основной трудностью при обобщении его на многомерный $(n > 3)$ случай. Задача, таким образом, состоит в разрешении этой трудности.

Метод исследований

Используются методы матричной алгебры, в том числе повороты координатных 2-плоскостей. Вводится понятие -расщепления и симметричного m-расщепления базисных векторов, под которыми понимается трансформация R^n в R^{n+m-1} путем замены $\boldsymbol{e}_i$ на m векторов $\boldsymbol{e}_{i1}, \dots, \boldsymbol{e}_{ij}, \dots, \boldsymbol{e}_{im}$, ортогональных друг другу и всем другим базисным векторам исходного базиса.

Результаты исследований

Далее применяются ортонормированные базисы.

Th 1 (существования). *Для двух линейно независимых векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *в* R^n *существует их векторное произведение* $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Доказательство

Три линейно независимых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{g}$ имеют инвариантное описание, включающее в себя длины векторов, углы между ними и их взаимную ориентацию. Для каждого из этих трех векторов *однозначно* определена их проекция на любой другой вектор. Другими словами, определены их попарные скалярные произведения.

В этой связи векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{g}$ имеют *однозначное* координатное описание в базисах любой размерности, начиная с 3 (пассивная точка зрения (alias)). При координатном описании они сохраняют размеры, углы между ними и взаимную ориентацию, поскольку в базисе любой размерности их попарные скалярные произведения остаются неизменными. Другими словами, координатное описание той или иной размерности при пассивной точке зрения не меняет сущность векторов и их отношений друг к другу. Следовательно, если в качестве вектора $\boldsymbol{g}$ рассматривать вектор $\boldsymbol{c}$, являющийся при инвариантном описании векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то его сущность в этом качестве не изменится при координатном описании в R^n. ■

Расщепление базисных векторов

Df 1. m-расщеплением базисного вектора $\boldsymbol{e}_i$ является трансформация R^n в R^{n+m+1} путем замены $\boldsymbol{e}_i$ на m векторов $\boldsymbol{e}_{i1}, \dots, \boldsymbol{e}_{ij}, \dots, \boldsymbol{e}_{im}$, ортогональных друг другу и всем другим базисным векторам исходного базиса, при этом

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij} e_{ij},$$

где k_{ij} – направляющие косинусы $\boldsymbol{e}_i$ в базисе $\boldsymbol{e}_{i1}, \dots, \boldsymbol{e}_{ij}, \dots, \boldsymbol{e}_{im}$.

Выбор направляющих косинусов k_{ij} может быть сопряжен с произволом. Произвол минимизируется при симметричном m -расщеплении.

Df 2. Симметричное -расщепление базисного вектора – это m-расщепление, при котором

$$\forall j \in [1, m] \bigg| k_{ij} = \frac{\sqrt{m}}{m}.$$

Представление векторного произведения двух векторов в $\boldsymbol{R^n}$

Th 2. Векторное произведение $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ может быть представлено в R^n.

Доказательство:

Пусть в R^3 имеются два линейно независимых вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Их координаты равны

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в R^3 определено векторное произведение $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Его координаты равны

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Базисный вектор $\boldsymbol{e}_3$ подвергается симметричному $(n - 2)$-расщеплению. В образовавшемся R^n (в базисе $\boldsymbol{e'}_1, \dots, \boldsymbol{e'}_j, \dots, \boldsymbol{e'}_n$) имеют место все три вектора (пассивная точка зрения), координаты которых, соответственно, равны

$$\boldsymbol{a'} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}; \boldsymbol{b'} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}; \boldsymbol{c'} = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ c'_3 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\forall i \in [3, n] \left| c'_i = \frac{\sqrt{n-2}}{n-2} c_3. \right.$$

Произвольная квадратная матрица отображения T позволяет получить координаты всех трех векторов в другом базисе этой же размерности $\boldsymbol{e''}_1, \dots, \boldsymbol{e''}_j, \dots, \boldsymbol{e''}_n$:

$$\boldsymbol{a}'' = T \cdot \boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a''_1 \\ \vdots \\ a''_n \end{pmatrix}; \boldsymbol{b}'' = T \cdot \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}; \boldsymbol{c}'' = T \cdot \boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} c''_1 \\ \vdots \\ c''_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом, в произвольном базисе $\boldsymbol{e''}_1, \dots, \boldsymbol{e''}_j, \dots, \boldsymbol{e''}_n$ для двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеет место их векторное произведение $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ с координатами (2). ■

Тем самым решена некоторым образом обратная задача – при известном векторном произведении определение координат всех трех векторов в R^n.

***Ex* 1.** В R^3 координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти: $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Координаты векторного произведения $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ равны

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Базисный вектор $\boldsymbol{e}_3$ подвергается симметричному 2-расщеплению. В образовавшемся R^4 координаты векторов равны

$$\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7{,}071 \\ 7{,}071 \end{pmatrix}.$$

Произвольная квадратная матрица отображения

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}497 & 0{,}628 & 0{,}287 & -0{,}527 \\ 0{,}47 & 0{,}22 & -0{,}814 & 0{,}262 \\ -0{,}171 & 0{,}604 & 0{,}296 & 0{,}72 \\ 0{,}709 & -0{,}439 & 0{,}41 & 0{,}369 \end{pmatrix}$$

позволяет получить координаты всех трех векторов в другом базисе этой же размерности

$$\boldsymbol{a}'' = T \cdot \boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} 2{,}876 \\ 1{,}599 \\ 1{,}47 \\ 0{,}101 \end{pmatrix}; \boldsymbol{b}'' = T \cdot \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} 3{,}138 \\ 1{,}099 \\ 3{,}02 \\ -2{,}197 \end{pmatrix}; \boldsymbol{c}'' = T \cdot \boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} -1{,}695 \\ -3{,}902 \\ 7{,}184 \\ 5{,}503 \end{pmatrix}.$$

Ориентация векторного произведения

В R^3 вектор $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ лежит на линии пересечения плоскостей, нормалями которых являются векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ или в терминах многомерного пространства – в 1-плоскости, образованной пересечением двух 2-плоскостей. В этой 1-плоскости можно построить два противоположно направленных вектора, величина которых равна модулю векторного произведения, и ортогональных векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Формально концы этих векторов образуют в 1-плоскости 0-сферу.

В R^4 векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ служат нормалями двум 3-плоскостям, пересечением которых является 2-плоскость, все векторы которой ортогональны векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Концы векторов, величина которых равна модулю векторного произведения, образуют в этой 2-плоскости 1-сферу (окружность).

И в R^3 и в R^4 имеет место неоднозначность при выборе направления векторного произведения двух векторов. В R^3 приходится выбирать из векторов, ограниченных 0-сферой, в R^4 – из векторов, ограниченных 1-сферой (окружностью).

В R^3 неоднозначность преодолевается постулированием – в качестве направления **c** выбирается вектор правый относительно $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Неоднозначность в R^4 может быть преодолена также как и в R^3 – выбором одного наиболее подходящего варианта.

По аналогии с взаимным расположением вектора $\boldsymbol{c}$ и вектора, являющегося суммой базисных ортов, имеющем место для частного случая (1), для произвольного базиса можно принять следующее условие.

Cond 1. *Векторное произведение* $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *в* R^4 *лежит на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на 2-плоскость, перпендикулярную векторам* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

Векторное произведение в R^3 формально удовлетворяет условию 1.

Повороты координатных 2-плоскостей

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_{i1}, \dots, \boldsymbol{e}_{ij}, \dots, \boldsymbol{e}_{in}$ вектор $\boldsymbol{d}$ имеет координаты d. Повороту -ый координатной 2-плоскости соответствует следующая матрица перехода

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1_{11} & 0_{12} & \dots & 0_{1i} & \dots & 0_{1j} & \dots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 1_{22} & \dots & 0_{2i} & \dots & 0_{2j} & \dots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_{i1} & 0_{i2} & \dots & cos\varphi & \dots & sin\varphi & \dots & 0_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_{j1} & 0_{j2} & \dots & -sin\varphi & \dots & cos\varphi & \dots & 0_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n1} & 0_{n2} & \dots & 0_{ni} & \dots & 0_{nj} & \dots & 1_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

При этом $cos\varphi$ и $sin\varphi$ находятся из условия

$$d_i cos\varphi + d_j sin\varphi = d_i' \text{ и } -d_i sin\varphi + d_j cos\varphi = d_j',$$

$$d_j' = 0, \text{если } cos\varphi = \frac{d_i}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}} \text{ и } sin\varphi = \frac{d_j}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}} \text{ при } d_i' = \sqrt{d_i^2 + d_j^2}$$

Все другие координаты остаются без изменения.

Таким образом, поворотом -ый координатной 2-плоскости в соответствии с матрицей перехода T_{ij} можно изменять координаты i и j вектора $\boldsymbol{d}$, например, обнулять координату j.

Определение векторного произведения двух векторов в $\boldsymbol{R^4}$

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют координаты

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Координаты суммы базисных ортов $\boldsymbol{s}$ равны

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для перехода к новому базису $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*, \boldsymbol{e}_4^*$, в котором векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{s}$ будут иметь координаты

$$\boldsymbol{a}^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ 0_2 \\ 0_3 \\ 0_4 \end{pmatrix}; \boldsymbol{b}^* = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ 0_3 \\ 0_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{s}^* = \begin{pmatrix} s_1^* \\ s_2^* \\ s_3^* \\ s_4^* \end{pmatrix}, \forall i \in [3,4] \Big| s_i^* = \frac{\sqrt{4 - (s_1^*)^2 - (s_2^*)^2}}{2},$$

следует выполнить $6 - l$ поворотов координатных 2-плоскостей. Здесь l – число нулевых координат в исходном базисе. Каждому повороту соответствует своя матрица T_k типа (3).

Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ к базису $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*, \boldsymbol{e}_4^*$ равна

$$T = \prod_{k=6-l}^{1} T_k,$$

т.е. перемножение производится в обратной последовательности. При этом

$$\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{Ta}, \boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{Tb}, \boldsymbol{s}^* = \boldsymbol{Ts}.$$

Координаты вектора $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ в новом базисе $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*, \boldsymbol{e}_4^*$ в соответствии с условием 1 равны

$$\boldsymbol{c}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3^* \\ c_4^* \end{pmatrix}, \forall i \in [3{,}4] \left| c_i^* = \frac{\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{2}\right. . \qquad (4)$$

Знак радикала в (4) выбирается таким образом, чтобы вектор $\boldsymbol{c}$ образовывал с $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ правую тройку векторов.

Координаты вектора $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ в исходном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ равны

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{T}^{-1}\cdot \boldsymbol{c}^* = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Результатом объединения классического инвариантного определения векторного произведения двух векторов и условия (1) является

Df 3. *Векторное произведение* $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$*двух линейно независимых векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *в* R^4 *есть вектор, лежащий на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на 2-плоскость, перпендикулярную векторам* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*, модуль его равен* $|\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2|$*, при этом векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *образуют правую тройку векторов.*

Это определение при $n = 3$ полностью удовлетворяет классическому векторному произведению.

При $n = 4$ свойства векторного произведения, указанные в определении 3, не отличаются от классического трехмерного аналога, за исключением того, что вектор $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ содержит не три, а четыре компоненты.

Note 1. Если $\forall i \in [3{,}4] | s_i^* = 0$, т.е. сумма базисных ортов $\boldsymbol{s}$ линейно зависима от векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то их векторное произведение в соответствии с условием 1 неопределимо.

Ex 2. В R^4 по известным значениям $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ найти $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Решение. Пусть

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3{,}37 \\ 2{,}762 \\ -2{,}395 \\ -0{,}32 \end{pmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3{,}289 \\ 1{,}539 \\ -5{,}697 \\ 1{,}834 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}988 & 0 & 0 & -0{,}156 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}156 & 0 & 0 & 0{,}988 \end{pmatrix}, \boldsymbol{T}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}818 & 0 & -0{,}575 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}575 & 0 & 0{,}818 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{T}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}834 & 0{,}552 & 0 & 0 \\ -0{,}552 & 0{,}934 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3{,}411 \\ 2{,}762 \\ -2{,}395 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{a}^1 = \begin{pmatrix} 4{,}168 \\ 2{,}762 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}^3 = \boldsymbol{T}_3\boldsymbol{a}^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{T}_{31} = \boldsymbol{T}_3\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}674 & 0{,}552 & -0{,}479 & -0{,}106 \\ -4{,}447 & 0{,}8334 & 0{,}317 & 0{,}07 \\ 0{,}568 & 0 & 0{,}818 & -0{,}09 \\ 0{,}156 & 0 & 0 & 0{,}988 \end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{b}^3 = \boldsymbol{T}_{31}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ -1{,}865 \\ -2{,}96 \\ 2{,}324 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{T}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}626 & 0 & 0{,}78 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}78 & 0 & -0{,}626 \end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{b}^4 = \boldsymbol{T}_4\boldsymbol{b}^3 = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ 2{,}98 \\ -2{,}96 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{T}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}709 & -0{,}705 & 0 \\ 0 & 0{,}705 & 0{,}709 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{b}^5 = \boldsymbol{T}_5\boldsymbol{b}^4 = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ 4{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{T}_{51} = \boldsymbol{T}_5\boldsymbol{T}_4\boldsymbol{T}_{31} = \boldsymbol{T}_5\boldsymbol{T}_4\boldsymbol{T}_3\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}674 & 0{,}552 & -0{,}479 & -0{,}106 \\ -0{,}115 & -0{,}37 & -0{,}718 & 0{,}578 \\ 0{,}685 & -0{,}368 & 0{,}441 & 0{,}448 \\ 0{,}251 & -0{,}65 & -0{,}248 & -0{,}673 \end{pmatrix}.$$

Сумма ортов исходного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ в базисе базису $\boldsymbol{e}_1^5, \boldsymbol{e}_2^5, \boldsymbol{e}_3^5, \boldsymbol{e}_4^5$ имеет координаты

$$\boldsymbol{s}^5 = \boldsymbol{T}_{51}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{T}_{51}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}641\\-0{,}625\\1{,}207\\-1{,}32\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{T}_6 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -0{,}045 & -0{,}999\\0 & 0 & 0{,}999 & -0{,}045\end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{s}^6 = \boldsymbol{T}_6\boldsymbol{s}^5 = \begin{pmatrix}0{,}641\\-0{,}625\\1{,}265\\1{,}265\end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ к базису $\boldsymbol{e}_1^6, \boldsymbol{e}_2^6, \boldsymbol{e}_3^6, \boldsymbol{e}_4^6$ равна

$$\boldsymbol{T}_{61} = \boldsymbol{T}_6\boldsymbol{T}_{51} = \boldsymbol{T}_6\boldsymbol{T}_5\boldsymbol{T}_4\boldsymbol{T}_3\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix}0{,}674 & 0{,}552 & -0{,}479 & -0{,}106\\-0{,}115 & -0{,}37 & -0{,}718 & 0{,}578\\-0{,}281 & 0{,}666 & 0{,}228 & 0{,}652\\0{,}673 & -0{,}338 & 0{,}451 & 0{,}478\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\boldsymbol{a}^6 = \boldsymbol{T}_{61}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^3$, $\boldsymbol{b}^6 = \boldsymbol{T}_{61}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^5$, $\boldsymbol{s}^6 = \boldsymbol{T}_{61}\boldsymbol{s}$.

Координаты вектора $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$в последнем базисе $\boldsymbol{e}_1^6, \boldsymbol{e}_2^6, \boldsymbol{e}_3^6, \boldsymbol{e}_4^6$ в соответствии с (4) равны

$$\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{6}} = \begin{pmatrix}0\\0\\14{,}849\\14{,}849\end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ в исходном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ равны

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{T}_{61}^6\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{6}} = \begin{pmatrix}5{,}822\\4{,}869\\10{,}081\\16{,}786\end{pmatrix}.$$

Note 2. Порядок обнуления координат и, следовательно, значения промежуточных матриц могут быть иными. При этом нетрудно убедиться, что итоговая матрица $\mathbf{T}$ $(\boldsymbol{T}_{61})$ и значение вектора **c** в исходном базисе не изменяются.

Список использованных источников

1. Popov, I.P. (2016) Mathematical modeling of the formal analogy of electromagnetic field. Applied mathematics and control sciences, 4: 36–60.

2. Popov, I.P. (2017) A wave chain formed by the two monochromatic de Broglie waves**.** British journal of innovation in science and technology, 4(2): 27–31.

3. Popov, I.P. (2016) Mathematical modeling of the wave packet formed by two plane monochromatic de Broglie waves. Applied mathematics and control sciences, 2: 7–13.

4. Popov, I.P. (2016) Mathematical modeling of the formal analogy wave functions. Applied mathematics and control sciences, 1: 9–14.

5. Попов, И.П. Скалярная и векторная производные векторных полей и их приложение к задачам механики / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2017. – Т. 5. – № 1. – С. 2–7.

6. Попов, И.П. Поверхностный, нулевой и мнимый нулевой операторы набла / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2017. – Т. 5. – № 2. – С. 2–11.

7. Попов, И.П. Об одном способе восстановления функции по ее градиенту / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2018. – Т.6. – №1. – С. 8-11.

8. Popov, I.P. (2017) Vector differential surface operator. British journal of innovation in science and technology, 6(2): 25–31.

9. Попов, И.П. О некоторых операциях над векторами / И.П. Попов // *Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2014. – №5 (24). – С. 55–61.*

10. Попов, И.П. Поверхностные градиент, дивергенция и ротор / И.П. Попов // *Вестник* Псковского *государственного университета. Естественные и физико-математические науки. – 2014. – Вып. 5. – С. 159–172.*

Материал поступил в редакцию: 11.01.2018
Материал принят к публикации: 30.03.2019

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

VECTOR MULTIPLICATION OF TWO VECTORS IN FOUR-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE WITH APPLIED ASPECTS

Popov I.P.

Abstract. The aim of the paper is to define the vector product of two vectors $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ in four-dimensional Euclidean space. We introduce the notion of m-splitting and symmetric m-splitting of basis vectors, by which is meant the trans-

formation of R^n into R^{n+m-1} by replacing $\boldsymbol{e}_i$ by m vectors $\boldsymbol{e}_{i1}, \dots, \boldsymbol{e}_{ij}, \dots, \boldsymbol{e}_{im}$ orthogonal to each other and all other basis vectors of the original basis. The inverse problem is solved in some way-for a known vector product the definition of the coordinates of all three vectors in R^n. A condition is established in accordance with which the vector product $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ in R^4 lies on one line with the projection of the sum of the basis vectors to the 2-plane perpendicular to the vectors $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$. The results of the work can be used to solve multidimensional physics and engineering problems.
Keywords: gradient, function, partial derivative, integral, variable.

References

1. Popov, I.P. (2016) Applied mathematics and control sciences, 4: 36–60.
2. Popov, I.P. (2017) British journal of innovation in science and technology, 4(2): 27–31.
3. Popov, I.P. (2016) Applied mathematics and control sciences, 2: 7–13.
4. Popov, I.P. (2016) Applied mathematics and control sciences, 1: 9–14.
5. Popov, I.P. (2017) Software of systems in the industrial and social fields, 5 (1): 2-7.
6. Popov, I.P. (2017) Software of systems in the industrial and social fields, 5 (2): 2-11.
7. Popov, I.P. (2018) Software of systems in the industrial and social fields, 6(1): 8-11.
8. Popov, I.P. (2017) British journal of innovation in science and technology, 6(2): 25–31.
9. Popov, I.P. Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Fizika, 2014, no 5(24), pp. 55-61.
10. Popov, I.P. Vestnik Pskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki, 2014, Vyp. 5, pp. 159-172.

ОБ АВТОРАХ:

Попов Игорь Павлович – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета. E-mail: ip.popow@yandex.ru

ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Попов, И.П. Векторное произведение двух векторов в четырехмерном евклидовом пространстве с учетом прикладных аспектов / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2019. – Т.7. – № 1. – С. 11-17.

Popov I.P. (2019) Vector multiplication of two vectors in four-dimensional Euclidean space with applied aspects, 7 (1): 11-17.