МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.946 https://doi.org/10.18503/2306-2053-2018-6-1-2-7

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ БОРГА-ЛЕВИНСОНА НА N-МЕРНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Смирнова Л.В., Кинзина И.И.

Аннотация. В работе используется общая теория эллиптических уравнений. Основным в исследовании является резольвентный метод. Найдены условия единственности восстановления потенциала в обратной задаче для задачи Борга-Левинсона с краевыми условиями Робена, рассматриваемой на N – мерном параллелепипеде, если известен характер асимптотического разложения собственных чисел. Этот результат согласуется с результатом, полученным ранее для задачи с краевыми условиями Неймана. Доказанная теорема может быть использована при решении обратных задач спектрального анализа, а также в разработке методик их численных решений.
Ключевые слова: эллиптические операторы, спектральная теория, обратные задачи, теорема единственности, резольвентный метод, собственные числа.

Введение

Обратные задачи спектрального анализа – задачи восстановления оператора по его известным спектральным характеристикам. Под спектральными характеристиками понимаются спектры при различных граничных условиях, спектральная функция, данные рассеяния и так далее. Главная идея практических приложений обратных задач следующая: информацию об интересующих неизвестных физических величинах получаем по другим, уже известным, величинам или по величинам, которые поддаются измерению. В качестве примера рассмотрим обратную задачу рассеяния на потенциале. Здесь представляет интерес потенциал $q(x)$ уравнения Шрёдингера, а измеряемой величиной является амплитуда рассеяния. Решение некоторых задач квантовой механики приводит к решению обратных задач спектрального анализа. Например, определение внутриатомных сил по заданным уровням энергии. Здесь уровни энергии и будут спектром, который может быть вычислен экспериментально.

В 1929 году появились самые первые работы в этой области. В.А. Амбарцумян доказал следующее утверждение:

Утверждение: *Пусть* $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ собственные числа задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, 0 \le x \le \pi, y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

где $q(x)$ *– непрерывная действительная функция. Если* $\lambda_n = n^2, n = \overline{1;\infty}$, *то* $q(x) \equiv 0$.

Следовательно, можно утверждать, что В.А. Амбарцумян впервые поставил обратную спектральную задачу [1]. И в первоначальной постановке обратная задача заключается в том, чтобы по спектру определить оператор. Обратную спектральную задачу для оператора Лапласа с потенциалом впервые поставил Ю.М. Березанский. Он опубликовал результаты исследований для обратной спектральной задачи в трёхмерном пространстве в 1958 году [2]. В работе Березанского Ю.М. рассматривается уравнение, заданное на конечной или бесконечной ограниченной области G трёхмерного пространства:

$$-\Delta u + c(p)u = \lambda u, \boldsymbol{Im}\, c(p) = 0$$

с граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(p)u = 0,$$

где $\sigma(p)$ – непрерывная вещественная функция точки p на границе Γ области G. Было доказано, что спектральная функция $\vartheta(p,q,\lambda), p,q \in I, -\infty < \lambda < \infty$, однозначно определяет коэффициент $c(p)$ в классе кусочно-аналитических коэффициентов, а также граничное условие на некоторой части границы Γ, т.е. функцию $\sigma(p)$. Следовательно, Березанский Ю.М. устанавливает связь между решением многомерной обратной задачи и спектральной функцией этой задачи. Там же он подчёркивает, что так и не удалось получить «эффективный» способ восстановления потенциала. Проблемы численных методов решения спектральных задач были рассмотрены в работах [5-7].

Представляемая работа посвящена проблеме восстановления потенциала в многомерной обратной задаче Борга-Левинсона с краевыми условиями 3-го рода. В [3] доказано, что в обратной задаче Борга-Левинсона с краевыми условиями 1-го рода без ущерба в восстановлении потенциала можно не учитывать любое конечное число спектральных объектов. Задача рассматривалась в ограниченной -мерной области Ω с границей S класса C^{∞}. Этот вывод был основан на результатах, опубликованных в [4]. В работах [8-12] доказано, что при некоторых условиях бесконечное число спектральных объектов можно опустить или можно задать спектральные объекты в задаче Борга-Левинсона с краевыми условиями Дирихле не точно. В статье, рассматривая задачу Борга-Левинсона с краевыми условиями Робена на N-мерном параллелепипеде, улучшается результат, изложенный в работе [9], ослабляются требования, которые наложены на бесконечное число точек спектра, не оказывающи влияние на восстановление потенциала.

Методики

Пусть Ω – N-мерный параллелепипед с поверхностью S. Для действительной функции $\delta \in C^2(S)$, $\delta(x) \leq 0$, и действительных функций $q_j \in C^2(\overline{\Omega})$ при $j = 1{,}2$ рассмотрим краевые задачи Робина:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q_j(x)u(x) = \lambda u(x), x \in \Omega; \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \partial u\right]\Big|_S = 0, \end{cases}$$

где ν – внутренняя нормаль к S; λ – спектральный параметр. Решением краевых задач Робина будем считать функции из $C^2(\overline{\Omega})$, которые соответственно удовлетворяют всюду на $\overline{\Omega}$ каждой из них.

Известно, что рассматриваемая задача для каждого j имеет не более счетного числа собственных значений $\mu_1,\ \mu_2, \mu_3, \ldots$, каждое из которых имеет конечную кратность [13]. Пусть $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \ldots$ – собственные числа этой краевой задачи, взятые с учетом кратности, а $u_t(q_j)$ – соответствующие им собственные ортонормированные в $L_2(\overline{\Omega})$ функции, возможность выбора которых следует из теоремы Гильберта-Шмидта. В случае кратных собственных чисел есть определённый произвол в выборе ортонормированных функций.

Введем оператор Дирихле $D\colon L_2(S) \to L_2(S)$, задаваемый равенством $D(\lambda, q_0)f = V_j\big|_S$, где $f \in L_2(S)$, а функции $V_j \in C^2(\overline{\Omega})$, рассматриваемые как элементы из $L_2(\overline{\Omega})$, являются решениями задач Робина при $\lambda \in C, \lambda \neq \mu_t(q_j), t = \overline{1, \infty}$:

$$\begin{cases} -\Delta V(x) + q_j(x)V(x) = \lambda V(x), x \in \Omega; \\ \left[\dfrac{\partial V}{\partial \nu} - \delta V\right]\Big|_S = \dfrac{\partial f}{\partial \nu} - \delta f. \end{cases}$$

Определим функцию рассеяния

$$F(\lambda, \omega, \theta; q_j; \delta) = \int\limits_S \left(D(\lambda, q_j)\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda,\omega}}{\partial \nu} - \delta\varphi_{\lambda,\omega}\right)\right)(x)\,\overline{\frac{\partial \varphi_{\lambda,-\theta}}{\partial \nu}}(x)\,dS_x,$$

где i – мнимая единица; S_x – элемент площади поверхности; $\varphi_{\lambda,\omega}(x) = exp\left(i\sqrt{\lambda}\omega x\right)$; $\lambda \in C/(-\infty; 0)$; $\omega, \theta \in S^{n-1}$; $\omega x = \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k$.

Можно показать, что

$$F(\lambda, \omega, \theta; q_j) = -\frac{\lambda}{2}(\theta - \omega)^2 \int\limits_\Omega exp\{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega)x\}\,dx + \int\limits_\Omega exp\{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega)q_j(x)\}\,dx -$$

$$-\int\limits_S \delta(x)(-\Delta + q - \lambda)^{-1}\left(q_j\varphi_{\lambda,\omega}\right)(x)\overline{\varphi_{\lambda,-\theta}(x)}\,dS_x -$$

$$-\int_S q_j(x)(-\Delta+q-\lambda)^{-1}\big(q_j\varphi_{\lambda,\omega}\big)(x)\overline{\varphi_{\lambda,-\theta}(x)}dx.$$

Пусть $\xi\in R^n$ при $\xi\neq 0$ – произвольный фиксированный вектор. Выберем $\eta\in R^n$, $|\eta|=1$, так, чтобы η был ортогонален ξ.

Зададим для достаточно большого натурального параметра n следующие последовательности:

$$c_n=\left(1-\frac{|\xi|^2}{4n^2}\right)^{\frac{1}{2}},\theta_n=c_n\eta+\frac{\xi}{2n},\omega_n=c_n\eta-\frac{\xi}{2n},l_n=(n+i)^2.$$

Нетрудно увидеть, что в этом случае будут справедливы предельные соотношения:

$$\sqrt{l_n}(\theta_n-\omega_n)\to\xi \text{ при } n\to\infty;\ \boldsymbol{Im}\,l_n\to\infty \text{ при } n\to\infty;$$

$$\boldsymbol{Im}\sqrt{l_n}\cdot\theta_n,\boldsymbol{Im}\sqrt{l_n}\cdot\omega_n \text{ ограничены при } n\to\infty,$$

где $\boldsymbol{Im}$ – мнимая часть числа. Тогда, учитывая то, что при $n\to\infty$

$$\langle\delta R(l_n)\big(q\varphi_{\lambda,\omega}\big),\overline{\varphi_{\lambda,-\theta}}\rangle+\langle qR(l_n)\big(q\varphi_{\lambda,\omega}\big),\overline{\varphi_{\lambda,-\theta}}\rangle\to 0,$$

получим предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty}F\big(l_N,\theta_N,\omega_N;q_j\big)=-\frac{|\xi|^2}{2}\int_\Omega exp\{-ix\xi\}\,dx+\int_\Omega exp\{-ix\xi\}\,q_j(x)dx. \quad (1)$$

В [3] утверждается, что оператор Дирихле формально имеет ядро

$$^kD=\sum_{t=1}^{\infty}u_t\big(q_j\big)(x)\overline{u_t\big(q_j\big)(y)}\big(\mu_t\big(q_j\big)-\lambda\big)^{-1},x,y\in S.$$

Если дополнительно к этому оператор $^kD\big(\lambda,q_j\big)-{}^kD(\lambda,q_2)$ действует в $L_2(S)$, то для операторной нормы имеем оценку

$$\big\|{}^kD\big(\lambda,q_j\big)-{}^kD(\lambda,q_2)\big\|\le$$

$$\le\sum_{t=1}^{\infty}|\mu_t(q_2)-\mu_t(q_1)||\mu_t(q_1)-\lambda|^{-1}|\mu_t(q_2)-\lambda|^{-1}\,\|u_t(q_1)(x)\|^2_{L_2(S)}+$$

$$+\sum_{t=1}^{\infty}\left\|u_t(q_1)(x)\cdot\overline{u_t(q_1)(y)}-u_t(q_2)(x)\cdot\overline{u_t(q_2)(y)}\right\|_{L_2(S\times S)}|\mu_t(q_2)-\lambda|^{-1}\equiv S_1+S_2.$$

Так как Ω – параллелепипед, то будем рассматривать только те потенциалы q_1 и q_2, для которых

$$\mu_t\big(q_j\big)=C_1t^{\frac{2}{n}}+o\left(t^{\frac{1}{n}+\gamma}\right),0<\gamma<\frac{1}{n}.$$

Это справедливо, например, для задачи с потенциалом, равным нулю.

Пусть существует $\varepsilon_0\in R$ такое, что для $\varepsilon>\varepsilon_0$ выполнимо условие

$$p_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,t^{\varepsilon}|\mu_t(q_2)-\mu_t(q_1)|<\infty. \quad (2)$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [9], можно показать, что если для натуральных чисел t,t_0 выполняется неравенство $|t-t_0|>C\cdot t_0^{\beta}>0$, где $\beta<1$, а C – некоторая положительная постоянная, не зависящая от t и t_0, то существует $C_3>0$, для которой выполнены неравенства:

$$\big|\mu_t\big(q_j\big)-\mu_{t_0}\big(q_j\big)\big|\ge C_3\cdot max\{t_0,t\}^{\frac{2}{n}+\beta-1}>0 \text{ и } \big|\mu_t(q_1)-\mu_{t_0}(q_2)\big|\ge C_3\cdot max\{t_0,t\}^{\frac{2}{n}+\beta-1}>0.$$

Фиксируем некоторое $\beta<1$ и возьмём $\tau\le 2/n+\beta-1$.

Тогда, положив $n=\left|\sqrt{\mu_{t_0}(q_1)-1}\right|$, $l_n=n^2-1+2ni$ и применив неравенство

$$a+b\ge c_{\varphi}\cdot a^{\varphi}\cdot b^{1-\varphi},0\le\varphi\le 1,c_{\varphi}=const,c_{\varphi}>0,a,b\ge 0,$$

получим следующие оценки:

$$S_1 \equiv \sum_{|t-t_0|<C\cdot t_0^{\beta}} + \sum_{|t-t_0|<C\cdot t_0^{\beta}>0} \le const\left(\frac{p_0 t_0^{-\varepsilon} t_0^{\beta}}{t_0^{\frac{2}{n}}} + \sum_{|t-t_0|<C\cdot t_0^{\beta}>0} \frac{p_0 t^{-\varepsilon}}{t^{2\varphi\tau} t_0^{\frac{2-2\varphi}{n}}}\right) \le$$

$$\le const p_0\left(\frac{1}{t_0^{\varepsilon-\beta+\frac{2}{n}}} + \sum_{|t-t_0|<C\cdot t_0^{\beta}>0} \frac{1}{t_0^{2\varphi\tau+\varepsilon-1+\frac{2-2\varphi}{n}}}\right).$$

Отсюда при условии:

$$\begin{cases} \varepsilon > \beta - \dfrac{2}{n}, \\ \varepsilon > 1 - 2\varphi\left(\tau - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{2}{n}, \end{cases}$$

сумма $S_1 \to 0$ при $t_0 \to \infty$.

Наименьшее ε_0, при котором выполняется (2), равно $\varepsilon_0 = 1 - 8/(3n)$, и достигается оно при $\beta = 1 - 2/(3n)$.

Рассмотрим сумму S_2. Допустим, что существует $\alpha_0 \in R$ такое, что при $\alpha > \alpha_0$ справедливо условие

$$q_0 = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{\alpha} \left\| u_t(q_1)(x) \cdot \overline{u_t(q_1)(y)} - u_t(q_2)(x) \cdot \overline{u_t(q_2)(y)} \right\|_{L_2(S\times S)} < \infty.$$

Тогда аналогично тому, как это сделано выше, для $\tilde{\beta} < 1$ и $\tau \le 2/n + \tilde{\beta} - 1$ получим при условии

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n} + \alpha - \tilde{\beta} > 0, \\ \alpha + \varphi\tau + (1-\varphi)\dfrac{1}{n} - 1 > 0, \end{cases}$$

что

$$S_2 \equiv \sum_{|t-t_0|<C\cdot t_0^{\tilde{\beta}}} \left\| u_t(q_1)(x) \cdot \overline{u_t(q_1)(y)} - u_t(q_2)(x) \cdot \overline{u_t(q_2)(y)} \right\|_{L_2(S\times S)} \times |\mu_t(q_2) - \lambda|^{-1} +$$

$$+ \sum_{|t-t_0|<C\cdot t_0^{\tilde{\beta}}>0} \left\| u_t(q_1)(x) \cdot \overline{u_t(q_1)(y)} - u_t(q_2)(x) \cdot \overline{u_t(q_2)(y)} \right\|_{L_2(S\times S)} \times |\mu_t(q_2) - \lambda|^{-1} \le$$

$$\le const\left(\frac{q_0 t_0^{-\alpha} t_0^{\tilde{\beta}}}{t_0^{\frac{1}{n}}} + \sum_{|t-t_0|<C\cdot t_0^{\tilde{\beta}}>0} \frac{q_0 t^{-\alpha}}{t^{\varphi\tau+\frac{1-\varphi}{n}}}\right) \le$$

$$\le const q_0\left(\frac{1}{t_0^{\alpha-\tilde{\beta}+\frac{1}{n}}} + \sum_{|t-t_0|<C\cdot t_0^{\tilde{\beta}}>0} \frac{1}{t_0^{\varphi\tau+\alpha-1+\frac{1-\varphi}{n}}}\right) \to 0 \text{ при } t_0 \to \infty.$$

Отсюда следует, что наименьшее $\alpha_0 = 1 - 3/(2n)$ достигается при $\tilde{\beta} = 1 - 1/(2n)$.

Так как $t_0 \to \infty$, то и $\mu_{t_0} \to \infty$. В свою очередь, $n = \left\lfloor \sqrt{\mu_{t_0}(q_1) - 1} \right\rfloor$, следовательно, n также стремится к бесконечности. Таким образом,

$$\| kerN(l_n, q_1) - kerN(l_n, q_2) \| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В результате при всех перечисленных выше условиях имеем

$$\lim_{N\to\infty} |F(\lambda, \theta, \omega; q_1) - F(\lambda, \theta, \omega; q_2)| = 0.$$

В результате того, что коэффициенты Фурье функций q_1 и q_2 равны, и сами функции совпадают для любого x из Ω. Из всего вышесказанного вытекает справедливость следующей теоремы:

Теорема. Пусть потенциалы q_1 и q_2 в Ω таковы, что

$$\mu_t(q_j) = C_1 t^{\frac{2}{n}} + o\left(t^{\frac{1}{n}+\gamma}\right), 0 < \gamma < \frac{1}{n};$$
$$\left\|u_t(q_j)\right\|_{L_2(S)} \le C_2, C_2 > 0, j = 1,2,$$

а также при $\varepsilon > 1 - 8/(3n)$ и при $\alpha > 1 - 3/(2n)$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{\varepsilon}|\mu_t(q_2) - \mu_t(q_1)| < \infty,$$
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{\alpha} \left\|u_t(q_1)(x) \cdot \overline{u_t(q_1)(y)} - u_t(q_2)(x) \cdot \overline{u_t(q_2)(y)}\right\|_{L_2(S\times S)} < \infty.$$

Тогда q_1 и q_2совпадают всюду на Ω.

Заключение и обсуждение

1. Требование $\|u_t(q)\|_{L_2(S)} \le C_2 \cdot t^{1/n}$ при $C_2 = 0$ справедливо для задач с потенциалами из $C^2(\overline{\Omega})$, определённых на -мерном параллелепипеде.

2. Аналогичная теорема справедлива для задачи (1), но с краевыми условиями Неймана.

3. Дальнейшее развитие темы состоит в доказательстве того, что существуют подпоследовательности собственных чисел, не влияющие на единственность восстановления потенциала в задаче Борга-Левинсона с краевыми условиями Робена, или же постановка подобных вопросов для других задач, ориентируясь на результаты, изложенные в [14].

Список использованных источников

1. Ambartsumian V. Über eine Frage der Eigenwerttheorie // Zeitschrift für Physik. – 1929. – Bd. 53. – S. 690 – 695.
2. Березанский, Ю.М. О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера / Ю.М. Березанский // Труды Моск. матем. об-ва. – 1958. – Т . 7. – № 3.
3. Isosaki, H. J. Math. Kyoto Univ. – 1991. – Vol.31. – N 3. – P. 743-753.
4. Nachman A., Sylvester J., Uhlmann G. Commun. Math. Phus. – 1988. – Vol.115. – P.595-605.
5. Dubrovskii, V.V. A new method for approximate evaluation of the first eigenvalues in the spectral problem of hydrodynamic stability of poiseuille flow in a circular pipe / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Doklady Mathematics. – 2001. – T.64. – №2. – C.165-168.
6. Dubrovskii, V.V. A new method for the evaluation of the first eigenvalues in the spectral problem of hydrodynamic stability of viscous fluid flow between two rotating cylinders / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Doklady Mathematics. – 2001. – T.64. – №3. – C. 425-429.
7. Dubrovskii, V.V. A new metod for approximate evaluation of the first eigenvalues in the Orr-Sommerfelg eigenvalue problem / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Doklady Mathematics. – 2001. – T.63. – №3. – C.355-358.
8. Смирнова, Л.В. К вопросу о математической модели восстановления гладких потенциалов в обратной задаче Дирихле для 2-мерного и 3-мерного случаев /Л.В. Смирнова // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2012. – № 2. – С.57 – 66.
9. Дубровский, В.В. К единственности решения обратных задач спектрального анализа для уравнений математической физики / В.В. Дубровский, Л.В. Смирнова // Фундаментальная и прикладная математика. – 1999. – Т. 5. – № 2. – С.411-416.
10. Смирнова, Л.В. К вопросу о математической модели восстановления гладких потенциалов в обратной задачи Дирихле для n-мерного случая / Л.В. Смирнова // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2013. – № 1(3). – С. 11-17.
11. Smirnova, L.V. Infinite sequences not affecting the unique recovery of the potential / L.V.Smirnova, O.A.Torshina // Applied and Fundamental Studies: Proceedings of the 4th International Academic Conference. – St. Louis: Publishing House Science and Innovation Center, Ltd, 2013.
12. Smirnova, L.V. To the question of the uniqueness of the reduction potential in the inverse problem of the Borg-Levinson / L.V. Smirnova, A.S. Kushkumbaeva, O.A. Torshina // Management, Social sphere and medicine (ITSMSSM) : Proceedings of the 2016 con-ference on information technologies in science,. In book: Acsr-Advances in Comptuer Sclence Research, 2016. – Vol. 51, pp. 494–497.
13. Торшина, О.А. Алгоритм вычисления регуляризованного следа оператора Лапласа – Бельтрами с потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник МаГУ. Математика. – 2003. – Вып. 4. – С. 183-215.
14. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1962.
15. Кинзина, И.И. Вычисление собственных чисел дискретного самосопряженного оператора, возмущенного ограниченным оператором / И.И. Кинзина // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 6. – С. 16–24.

Материал поступил в редакцию: 26.02.2018
Материал принят к публикации: 09.03.2018

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

UNIQUENESS OF SOLUTION OF BORG-LEVINSON INVERSE PROBLEM ON N-DIMENSIONAL PARALLELEPIPED

Smirnova L.V., Kinzina I.I.

***Abstract*.** This article uses the general theory of elliptic equations. The main investigation method is the resolvent method. Uniqueness conditions for the recovery of potential are obtained for the Borg-Levinson inverse problem with the Robin boundary conditions on N-dimensional parallelepiped under the known asymptotic expansions of the eigenvalues. This result is in accord with the results which had been obtained for the problem with the Neumann boundary conditions. The theorem can be used for solving inverse spectral problems and development of numerical methods.

***Keywords*:** Elliptic operators, spectral theory, inverse problems, uniqueness theorem, resolvent method, eigenvalues.

References

1. Ambartsumian V. *Zeitschrift für Physik*, 1929, Bd. 53, s. 690 – 695.
2. Berezanskiy Yu.M. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 1958, vol . 7, no. 3. (In Russ.)
3. Isosaki H. J. *Math. Kyoto Univ*, 1991, vol.31, no. 3, pp. 743-753.
4. Nachman A., Sylvester J., Uhlmann G. *Commun. Math. Phus*, 1988, vol. 115, pp. 595-605.
5. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 2, pp. 165-168.
6. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 3, pp. 425-429.
7. Dubrovskii V.V., , Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 63, no. 3, pp. C.355-358.
8. Smirnova L.V. *Software of systems in the industrial and social fields*, 2012, pp.57 – 66. (In Russ.)
9. Dubrovskii V.V., Smirnova L.V. *Journal of Mathematical Sciences*, 1999, vol. 5, no. 2, pp. 411-416. (In Russ.)
10. Smirnova L.V. *Software of systems in the industrial and social fields*, 2013, 1 (3), pp. 11-17. (In Russ.)
11. Smirnova L.V. *Proceedings of the 4th International Academic Conference.* Publishing House Science and Innovation Center, Ltd, Louis, 2013.
12. Smirnova L.V., Kushkumbaeva A.S., Torshina O.A. *Acsr-Advances in Comptuer Sclence Research*, 2016, vol. 51, pp. 494-497.
13. Torshina O.A. *Vestnik MaGU. Matematika*, 2003, vol. 4, pp. 183-215. (In Russ.)
14. Ladyizhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Lineynyie i kvazilineynyie uravneniya ellipticheskogo tipa*. Science, Moscow, 1962. (In Russ.)
15. Kinzina I.I. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2008, no. 6, pp. 16-24. (In Russ.)

ОБ АВТОРАХ:

Смирнова Лариса Викторовна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университета им. Г.И. Носова». E-mail: smirnova20@bk.ru.

Кинзина Ирина Ивановна – канд. физ.-мат. н., доцент кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университета им. Г.И. Носова». E-mail: kinzina@mail.ru.

ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Смирнова, Л.В. Единственность решения обратной задачи Борга-Левинсона на N-мерном параллелепипеде / Л.В. Смирнова, И.И. Кинзина // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2018. – Т.6. – №1. – С. 2-7.

Smirnova L.V. and I.I. Kinzina (2018) Uniqueness of solution of Borg-Levinson inverse problem on N-dimensional parallelepiped. Software of systems in the industrial and social fields, 6 (1): 2-7.