УДК 519.6 https://doi.org/10.18503/2306-2053-2018-6-1-20-24

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КРИВЫХ БЕЗЬЕ

Утемисова А.А., Романов П.Ю.

Аннотация. Исследование кривых Безье, начатое французскими учеными в середине 20 века для компьютерного проектирования автомобильных кузовов, является актуальным и в настоящее время. Построение кривых Безье осуществляется с помощью контрольных точек, через две из которых кривая проходит (опорные), остальные (управляющие) точки задают форму кривой. Это позволяет получать необходимую форму кривой, изменяя положение контрольных точек. Математически кривые Безье задаются параметрическим выражением, зависящим от координат опорных вершин и полиномов Бернштейна. В статье рассмотрены методы построения кривых Безье (на основе полиномов Бернштейна, на основе алгоритма де Кастелье), отмечены преимущества каждого метода. Проведенный анализ позволил выделить наиболее важные свойства кривых, которые используются в различных программах автоматизированного проектирования и моделирования гладких линий.

Ключевые слова: кривые Безье, опорные точки, управляющие точки, параметрическая кривая, полиномы Бернштейна, алгоритм де Кастелье, моделирование гладких линий.

Введение

Кривые Безье исследовались двумя французскими учеными – Пьером Безье и Полем де Кастелье независимо друг от друга в 60-х годах прошлого века. Оба ученых проводили исследования в этом направлении в целях нахождения способа компьютерного проектирования автомобильных кузовов, так как оба на момент открытия работали в разных автомобильных компаниях (П.Безье – в «Рено», П. де Кастелье – в «Ситроен»). При этом работа Кастелье выполнена раньше (1959 г.), однако компания «Ситроен» долго это скрывала в качестве производственной тайны. Поэтому, впервые представив кривые Безье в 1962 году, П. Безье стал обладателем патента и увековечил свое имя в их названии. В настоящее время кривые Безье используются в различных программах автоматизированного проектирования и моделирования гладких линий.

Материалы и методы исследования, практические разработки

Прежде чем приступить к описанию методов построения кривых Безье, необходимо описать главный принцип или идею методов построения. Кривая Безье строится с помощью так называемых контрольных точек. Из всех контрольных точек кривая обычно проходит лишь через две опорные, или узловые, точки (полюсы). Остальные контрольные точки не лежат на самой кривой, но их положение определяет ее кривизну – кривая как бы «стремится» пересечься с ними, но, выгибаясь дугой, так и не «дотягивается». Эти точки называются управляющими. Таким образом, кривая непрерывно заполняет отрезок между опорными точками, изгибаясь в направлении управляющих точек, поэтому изменение положения любой из контрольных точек меняет изгиб кривой.

Такой принцип построения дает интуитивно определять внешний вид кривой по положению контрольных точек, что позволяет реализовать интерактивность и наглядность при подборе кривой нужной формы, а это, в свою очередь, позволяет наиболее быстро, просто и относительно точно реализовать представляемую кривую. Кроме того, представление кривой в виде контрольных точек позволяет, при ее трансформации (изменение формы, масштаба или пересчет в другой системе координат), не преобразовывать кривую полностью, а лишь контрольные точки, а затем построить по ним новую кривую. Это существенно уменьшает количество необходимых расчетов. Именно поэтому кривые Безье нашли широкое применение в системах автоматизированного проектирования, графических редакторах и других представлениях двумерной и трехмерной графики на компьютере, например, при представлении шрифтов формата TrueType [1].

Если внимательно посмотреть на эти кривые, то можно заметить, что:

1) степень кривой равна числу точек минус один, на рис. 1 изображены кубическая, квадратическая и линейная кривые;

2) кривые находятся внутри выпуклого многоугольника, вершинами которого являются опорные точки (рис. 2).

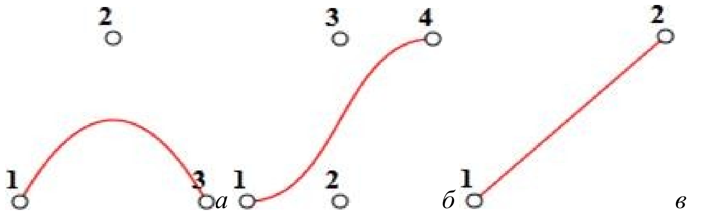

Рис. 1. Вид кривых Безье, построенных по: а – четырем точкам; б – по трем точкам; в – по двум точкам

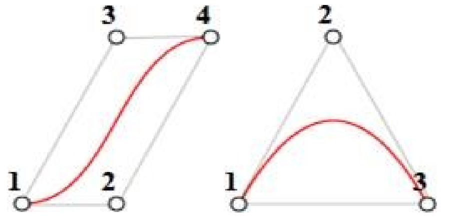

Рис. 2. Кривые Безье с опорными точками

В компьютерной графике на основе последнего свойства возможно осуществить оптимизацию проверки пересечений двух кривых: если их многоугольники (выпуклые оболочки) не пересекаются, то и кривые тоже не пересекутся.

Практическая значимость кривых Безье состоит в возможности ее изменения при помощи перемещения опорных точек. Форма кривой при этом изменяется интуитивно понятным образом.

Небольшая практика позволяет установить, как должны быть расположены точки, чтобы получилась необходимая форма кривой. При этом соединение нескольких кривых позволяет получить практически любую фигуру.

Примеры использования кривых Безье, приведены на рис. 3.

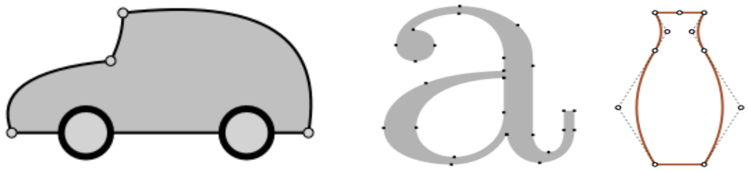

Рис. 3. Примеры использования кривых Безье

Кривые Безье задаются математическими формулами, в которых координаты кривой зависят от параметра $t \in [0,1]$. Кривая Безье – параметрическая кривая, задаваемая выражением

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i b_{i,n}(t)\,, 0 \le t \le 1, \qquad (1)$$

где $p_i, i \in \overline{1,n}$ – опорные вершины в пространстве кривой, называемые полюсами; $b_{i,n}(t)$ – базисные полиномы Бернштейна,

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{1} t^i (1-t)^{n-i}, i \in \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Для двух точек: $P = (1-t)P_1 + tP_2$.

Для трёх точек: $P = (1-t)^2 P_1 + 2(1-t)tP_2 + t^2 P_3$.

Для четырёх точек: $P = (1-t)^3 P_1 + 3(1-t)^2 tP_2 + 3(1-t)^2 t^2 P_3 + t^3 P_4$.

Эти уравнения – векторные, т.е. вместо P_i нужно подставить координаты l-й опорной точке (x_i, y_i).

Построение кривых Безье с использованием полиномов Бернштейна

Этот метод реализован в виде частного случая многочленов или полиномов Бернштейна, при котором его коэффициенты – векторные. Упомянутый полином был описан задолго до открытия самих кривых (в 1912 году) российским ученым Сергеем Натановичем Бернштейном при доказательстве аппроксимационной теоремы Вейерштрасса [2].

Для нахождения нужных функций используется базис Бернштейна – система полиномов, задаваемых формулой:

$$B_n(f;x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{\mathrm{k}}{n}\right) b_{k,n}(x).$$

Графическое представление кривой Безье приведено на рис. 4 и 5.

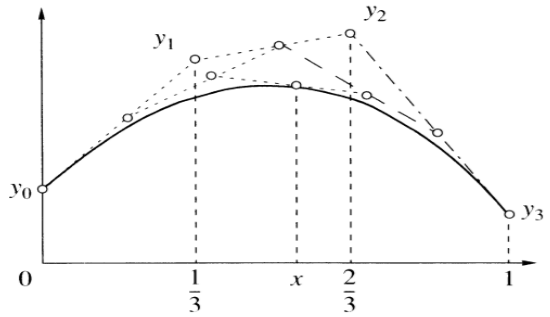

Рис. 4. График полинома Бернштейна

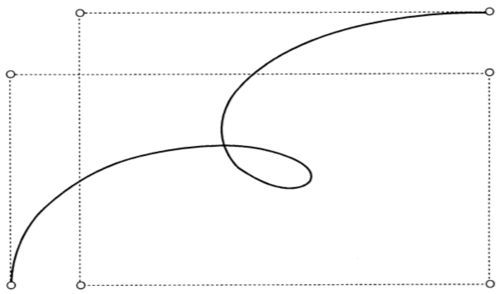

Рис. 5. Кривая Безье на плоскости

Преимуществами построения кривой Безье с использованием полиномов Бернштейна являются:

1) кривая является полиномиальной, а следовательно, бесконечно гладкой по всей своей длине;

2) построение не требует сложных вычислений. Полиномы Бернштейна зависят лишь от числа опорных точек, но не от их координат, поэтому кривая легко пересчитывается при любом изменении опорных точек.

Кривую Безье можно рассматривать как пошаговое уточнение формы многоугольника, получаемого последовательным соединением ее контрольных точек (рис. 6 – 10). При этом кривая Безье начинается и заканчивается в конечных точках данного многоугольника, а форма определяется относительным расположением оставшихся точек, через которые в общем случае она не проходит.

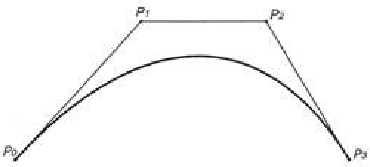

Рис. 6. Кривая в выпуклом многоугольнике

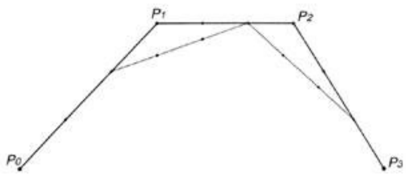

Рис. 7. Первый этап аппроксимации кривой

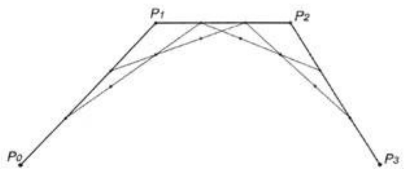

Рис. 8. Второй этап аппроксимации кривой

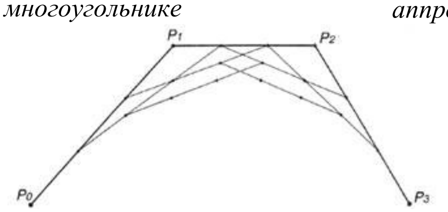

Рис. 9. Третий этап аппроксимации

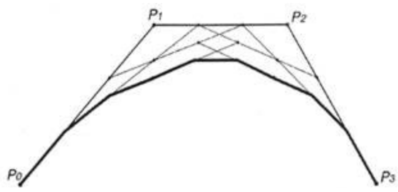

Рис. 10. Итоговая ломаная кривая

Исходя из этого, можно представить канонический вид кривой Безье, который обычно используют в графических редакторах плоской графики.

Построение рациональных кривых Безье

Рассмотренные выше способы построения кривой Безье позволяют управлять ее формой с помощью изменения положения опорных точек, причем, чем больше этих точек, тем в большей степени мы можем управлять кривой. Но, имея в качестве средств управления только опорные точки, иногда очень сложно построить кривые заданной формы. Поэтому было введено еще одно средство управления формой кривой – вес опорной точки. Влияние веса точки на форму кривой отличается от аналогичного влияния положения опорной точки. Так, при смещении опорной точки все точки кривой передвигаются на разные величины в направлении смещения. При изменении веса опорной точки точки кривой смещаются по направлению к этой точке, если вес увеличился, или в противоположную сторону, если вес уменьшился [3].

Кривые Безье, в которых каждой опорной точке присвоен дополнительный параметр – ее вес, получили название рациональных. Способ построения рациональных кривых Безье основан на алгоритме Де Кастелье, но прежде необходимо представить сам алгоритм в так называемой операторной форме или операторных обозначениях.

Согласно биному Ньютона рациональную кривую Безье можно представить в виде равных весов точек

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^{m} w_i B_i^m(\mathrm{t}) P_i}{\sum_{i=0}^{m} w_i B_i^m(\mathrm{t})}, 0 \le t \le 1,$$

где знаменатель становится постоянным, а кривая превращается из рациональной в нерациональную кривую Безье [4].

Преимуществами построения рациональной кривой Безье являются:
1) рациональная кривая Безье способна точно (не приблизительно) представлять собой дуги кривых второго порядка. Это бывает важно при проектировании деталей, в которых требуется, чтобы та или иная кривая в точности являлась дугой, например, эллипса, параболы или гиперболы (поскольку от этого зависят физические свойства той детали, в описании которой участвует данная кривая);
2) дополнительный параметр опорной точки – вес позволяет добиться совершенно новых форм кривых, невозможных при использовании нерациональных кривых Безье с любым количеством опорных точек.

Заключение

Таким образом, кривые Безье любой степени обладают следующими важными свойствами:
1) начальная и конечная контрольные точки лежат на кривой;
2) кривая на всем протяжении непрерывна, у нее отсутствуют разрывы;
3) касательные к кривой в начальной и конечной контрольных точках являются отрезками, соединяющими их с другими двумя соседними контрольными точками, через которые кривая не проходит;
4) точки на краях касательных располагаются на кривой только в том случае, если последняя представляет собой прямую линию;
5) поскольку кривая Безье есть взвешенное усреднение всех ее контрольных точек с положительными весами, а сумма их равна единице, кривая всегда располагается внутри выпуклого многоугольника, составленного из ее контрольных точек.

Список использованных источников

1. Графский, О. А. Моделирование сплайнов / О.А. Графский. – Хабаровск: ДВГУПС, 2010. – 75 с.
2. Бернштейн, С. Н. Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей / С.Н. Бернштейн. – М.: АН СССР, 1952. – Т. 1. – С.105–106.
3. Bezier, P., Numerical control: Mathematics and applications, Wiley, New York, 1972.
4. Farin, G., Curves and surfaces for CAGD, 5th ed., Acad. Press, New York, 2002.

Материал поступил в редакцию: 30.12.2017
Материал принят к публикации: 02.03.2018

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

SOME METHODS FOR CONSTRUCTING BÉZIER CURVES

Utemisova A.A., Romanov P. Yu.

Annotation. The study of Bézier curves, launched by French scientists in the mid 20th century to computer-aided design of car bodies is relevant in the present time. The construction of Bézier curves is performed by using control points, in two of which the curve passes (reference), the other (control) points define the shape of the curve. This allows you to obtain the required curve shape by changing the position of control points. Mathematically the Bezier curves specified by a parametric expression, depending on the coordinates of the control vertices and the Bernstein polynomials. The article considers methods of construction of Bézier curves (based on polynomials of Bernstein, based on the algorithm de Castelle), noted the advantages of each method. The analysis allowed to highlight the most important properties of curves, which are used in various programs of computer-aided design and simulation of smooth lines

Keywords**:** Bézier curves, reference points, control points, a parametric curve, Bernstein polynomials, algorithm of de Castile, the simulation of smooth lines**.**

References

1. Grafskiy O. A. *Modelirovanie splaynov*. DVGUPS, Habarovsk, 2010. (In Russ.)
2. Bernshteyn C.N. *Dokazatelstvo teoremyi Veyershtrassa, osnovannoe na teorii veroyatnostey*. AN SSSR, Moscow, 1952. (In Russ.)
3. Bezier P. *Numerical control: Mathematics and applications*. Wiley, New York, 1972.
4. Farin, G. *Curves and surfaces for CAGD*. Acad. Press, New York, 2002.

ОБ АВТОРАХ:

Утемисова Анар Алтаевна – канд. пед. наук, доцент кафедры математики Костанайского государственного университета им. А.Байтурсынова (КГУ), Казахстан. E-mail: anar_utemisova@mail.ru.
Романов Петр Юрьевич – д-р пед. наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова».
E-mail: romanov-magu@mail.ru.

ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Утемисова А.А. Некоторые методы построения кривых Безье / А.А. Утемисова, П.Ю. Романов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2018. – Т.6. – №1. – С. 20-24.

Utemisova A.A. and P. Yu. Romanov (2018) Some methods for constructing Bézier curves. Software of systems in the industrial and social fields, 6 (1): 20-24.