УДК 514.742.4 https://doi.org/10.18503/2306-2053-2018-6-1-8-11

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ГРАДИЕНТУ

Попов И.П.

Аннотация. Предложен способ восстановления функции по ее градиенту, в основу которого положено суммирование неопределенных интегралов от частных производных функций и исключение лишних слагаемых. Отмечено, что использование предложенного способа для определения энергии физического поля по известной конфигурации векторного поля сил не ограничивает актуальность задачи. С учетом специфики технических исследований рассмотрение ограничено рамками трехмерного евклидового пространства. Отмечено, что существует несколько способов отыскания функции по ее градиенту, каждый из которых обладает своими достоинствами и недостатками, к числу последних можно отнести необходимость выбора начальной точки интегрирования, что сопряжено с произволом, который может отразиться на виде окончательного решения, а также трудоемкость и громоздкость при подборе вспомогательных функций. Показано, что предлагаемый подход свободен от недостатков известных способов.

Ключевые слова: градиент, функция, частная производная, интеграл, переменная.

Введение

Актуальность задачи определения функции по ее градиенту можно показать на примере пространственного распределения сил, которое является градиентом энергии соответствующего поля [1]. Специфика технических исследований позволяет ограничиться рассмотрением операций на пространстве векторных полей и гладких функций в $\mathbb{R}^3$ [2-4].

Существует несколько способов [5–10] отыскания функции по ее градиенту

$$grad\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \quad (1)$$

Наиболее простой способ [11] заключается в вычислении криволинейного интеграла

$$f = \int_{x_0,y_0,z_0,}^{x,y,z} \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z_0)dy + \int_{z_0,}^{z} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz.$$

Достоинством этого метода является компактность, недостатком – необходимость выбора начальной точки интегрирования (x_0, y_0, z_0). Последнее сопряжено с произволом, который может отразиться на виде окончательного решения. Кроме того, в ряде случаев это может быть сопряжено с трудностями, вследствие чего представлять собой дополнительную задачу. Есть способы, например, приведенные в [12], лишенные этого изъяна. Они заключаются в подборе вспомогательных функций. Их существенными недостатками являются трудоемкость и громоздкость.

Метод исследований

Предлагаемый ниже подход свободен от недостатков указанных способов. По трудоемкости и компактности он сопоставим с первым способом, и в нем нет необходимости определения исходной точки интегрирования. Указанный метод исследования относится к методам математического анализа, а именно к интегрированию гладких функций.

Результаты исследований

Предлагаемый способ определяет следующая теорема.

Th. *Функция f может быть восстановлена по ее градиенту (1) в соответствии с формулой*

$$\begin{gathered} f = \int \frac{\partial f}{\partial x}dx + \int \frac{\partial f}{\partial y}dy + \int \frac{\partial f}{\partial z}dz - 2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C = \\ = P_{xyz}(x,y,z) + P_{xy}(x,y) + P_{xz}(x,z) + P_x(x) + \\ +Q_{xyz}(x,y,z) + Q_{xy}(x,y) + Q_{yz}(y,z) + Q_y(y) + \\ +R_{xyz}(x,y,z) + R_{xz}(x,z) + R_{yz}(y,z) + R_z(z) - 2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C. \end{gathered} \quad (2)$$

При этом

$$P_{xyz} = Q_{xyz} = R_{xyz} = V_{xyz}, \quad (3) \qquad P_{xz} = R_{xz} = V_{xz}, \quad (5)$$

$$P_{xy} = Q_{xy} = V_{xyz}, \quad (4) \qquad Q_{yz} = R_{yz} = V_{yz}. \quad (6)$$

Величины (3) – (6) представляют собой функции, содержащие переменные, указанные в индексах.

Доказательство

Очевидны равенства:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = P_{xyz}(x,y,z) + P_{xy}(x,y) + P_{xz}(x,z) + P_x(x),$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = Q_{xyz}(x,y,z) + Q_{xy}(x,y) + Q_{yz}(y,z) + Q_y(y),$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial z} dz = R_{xyz}(x,y,z) + R_{xz}(x,z) + R_{yz}(y,z) + R_z(z),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 P_{xyz}}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 Q_{xyz}}{\partial x \partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 R_{xyz}}{\partial x \partial y \partial z}.$$

Отсюда непосредственно следует (3):

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P_{xyz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{xz}}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q_{xyz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Отсюда с учетом (3) следует (4):

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 P_{xyz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P_{xz}}{\partial x \partial z}; \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 R_{xyz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial x \partial z}.$$

Отсюда с учетом (3) следует (5):

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 Q_{xyz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 Q_{yz}}{\partial y \partial z}; \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 R_{xyz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R_{yz}}{\partial y \partial z}.$$

Отсюда с учетом (3) следует (6).

Координаты градиента функции (2) можно вычислить следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\int \frac{\partial f}{\partial x} dx + Q_{xyz} + Q_{xy} + Q_{yz} + Q_y + R_{xyz} + R_{xz} + R_{yz} + R_z -$$

$$-2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C\Big) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Слагаемые в скобках, являющиеся функциями от x, кроме первого, взаимно уничтожаются. Частные производные по x от остальных равны нулю. Аналогичным образом обстоит дело с частными производными по y и z. Таким образом, градиент правой части (2) равен (1), следовательно, правая часть (2) представляет собой восстановленную функцию f. ■

Из теоремы получаем следствие.

Imp:

$$f = V_{xyz} + V_{xy} + V_{xz} + V_{yz} + V_x + V_y + V_z + C, \quad (7)$$

где $V_x = P_x(x), V_y = Q_y(y), V_z = R_z(z)$.

Ex:

$$grad\ f = \left(\frac{z}{y} + \sin y + \frac{z}{x} + 2x\right)\boldsymbol{i} + \left(x\cos y - \frac{xy}{y^2} + 3y^2\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{x}{y} + \ln x + 3y^2z^2 - e^z\right)\boldsymbol{k}.$$

Решение:

$$f = \left(\frac{xz}{y} + x\sin y + zlnx + x^2\right) + \left(\frac{xz}{y} + x\sin y + y^2z^3 + y^3\right) +$$

$$+\left(\frac{xz}{y} + zlnx + y^2z^3 - e^z\right) - 2\frac{xz}{y} - x\sin y - zlnx + y^2z^3 + C =$$

$$= \frac{xz}{y} + x\sin y + zlnx + y^2z^3 + x^2 + y^3 - e^z + C,$$

где

$$P_{xyz} = Q_{xyz} = V_{xyz} = \frac{xz}{y}, P_{xy} = Q_{xy} = V_{xy} = xsiny, P_{xz} = R_{xz} = V_{xz} = zlnx,$$

$$Q_{yz} = R_{yz} = V_{yz} = y^2 z^3, P_x = V_x = x^2, Q_y = V_y = y^3, R_z = V_z = e^z.$$

Вычисление по формуле (7) еще компактнее.

Заключение

Предложен способ восстановления функции по ее градиенту, в основу которого положено суммирование неопределенных интегралов от частных производных функции и исключение лишних слагаемых.

Предложенный подход свободен от недостатков известных ранее способов решения этой задачи.

Список использованных источников

1. Попов, И.П. Поверхностный, нулевой и мнимый нулевой операторы набла / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2017. – Т. 5. – № 2. – С. 2-11.
2. Попов, И.П. Скалярная и векторная производные векторных полей и их приложение к задачам механики / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2017. – Т. 5. – № 1. – С. 2-7.
3. Попов, И.П. Интеграл Фурье и дискретные спектры / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2015. – № 2. – С. 9-12.
4. Попов, И.П. Применение принципа суперпозиции при математическом моделировании состояний объекта / И.П. Попов, В.Г. Чумаков, В.И. Чарыков // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2016. – Т. 4. – № 1. – С. 8-12.
5. Попов, И.П. О некоторых операциях над векторами / И.П. Попов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2014. – №5 (24). – С. 55-61.
6. Попов, И.П. Скалярное и векторное дифференцирование векторов / И.П. Попов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2016. – №3 (34). – С. 19-27.
7. Попов, И.П. Операторы типа набла: поверхностный, нулевой и мнимый нулевой / И.П. Попов // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. – 2017. – № 6(255). – Вып. 46. – С. 44-53.
8. Popov, I.P. Mathematical modeling of the formal analogy of electromagnetic field / I.P. Popov // Applied mathematics and control sciences. 2016, no. 4, pp. 36-60.
9. Попов, И.П. Поверхностные градиент, дивергенция и ротор / И.П. Попов // Вестник Псковского государственного университета. Естественные и физико-математические науки. – 2014. – Вып. 5. – С. 159-172.
10. Попов, И.П. Разновидности оператора набла / И.П. Попов // Вестник Амурского государственного университета. Естественные и экономические науки. – 2015. – Вып. 71. – С. 20-32.
11. Богданов, Ю.С. Лекции по математическому анализу. Ч. 2 / Ю.С. Богданов. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 384 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1976. – 456 с.

Материал поступил в редакцию: 01.02.2018
Материал принят к публикации: 07.03.2018

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

A METHOD OF RECOVERY OF FUNCTIONS FROM ITS GRADIENT

Popov I.P.

Abstract. A method for restoring function from its gradient, which is based on the summation of indefinite integrals of partial functions and eliminate redundant terms. It is noted that the use of the method for determining the energy of the physical field according to the known force vector field configuration is not limited relevance task. Given the specific technological research is limited to consideration of the scope of the three-dimensional Euclidean space. It is noted that there are several ways of finding on its gradient function, each of which has its own advantages and disadvantages, among the latter include the need to select a starting point of integration, which is associated with the arbitrariness that can affect a final decision, as well as labor intensive and cumbersome the selection of auxiliary functions. It is shown that the proposed approach is free from the disadvantages of known methods.

***Keywords*:** Gradient, function, partial derivative, integral, variable.

References

1. Popov I.P. Software of systems in the industrial and social fields, 2017, no. 5 (2), pp. 2-11. (In Russ.)
2. Popov I.P. Software of systems in the industrial and social fields, 2017, no. 5 (1), pp. 2-7. (In Russ.)
3. Popov I.P. Software of systems in the industrial and social fields, 2015, no. 2, pp. 9-12. (In Russ.)
4. Popov I.P. Software of systems in the industrial and social fields, 2016, no. 4 (1), pp. 8-12. (In Russ.)

5. Popov I.P. Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Fizika, 2014, no. 5(24), pp. 55-61. (In Russ.)
6. Popov I.P. Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Fizika, 2016, no. 3(34), pp. 19-27. (In Russ.)
7. Popov I.P. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika, 2017, no. 6(255), pp. 44-53. (In Russ.)
8. Popov I.P. Applied mathematics and control sciences, 2016, no. 4, pp. 36-60.
9. Popov I.P. Vestnik Pskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki, 2014, no. 5, pp. 159-172. (In Russ.)
10. Popov I.P. Vestnik Amurvskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye i economicheskie nauki, 2015, no. 71, pp. 20-32. (In Russ.)
11. Bogdanov Y.U. Lekcii po matematicheskomu analizu. BGU, Minsk, 1978. (In Russ.)
12. Piskunov N.S. Differencualnoe i integralnoe ischislenija. Nauka, Moskow, 1976. (In Russ.)

ОБ АВТОРАХ:

Попов Игорь Павлович – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета, г. Курган. Email: ip.popow@yandex.ru

ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Попов, И.П. Об одном способе восстановления функции по ее градиенту / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2018. – Т.6. – №1. – С. 8-11.

Popov I.P. (2018) A method of recovery of functions from its gradient. Software of systems in the industrial and social fields, 6 (1): 8-11.