МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

УДК 514.742.43

ПОВЕРХНОСТНЫЙ, НУЛЕВОЙ И МНИМЫЙ НУЛЕВОЙ ОПЕРАТОРЫ НАБЛА

Попов И.П.

Аннотация. Вводится понятие о слагаемых векторных произведений, которыми являются первая или ортоположительная часть и вторая или ортоотрицательная часть. Дальнейшим развитием этого понятия является представление о сопряженных векторах, векторном дифференциальном поверхностном операторе, поверхностном градиенте, производной по поверхности, поверхностных дивергенции и роторе. Рассматриваются поверхностные функции, их поверхностное дифференцирование и интегрирование. Показаны особенности поверхностных функций, для которых все слагаемые являются функциями не менее чем двух переменных, кроме того, поверхностные функции имеют смешанные частные производные второго порядка, при этом, по крайней мере, одна из смешанных частных производных второго порядка от любого слагаемого не обращается в нуль. Доказывается теорема о восстановлении поверхностной функции по ее поверхностному градиенту. Вводится понятие о линейной комбинации координат и ее делении на вектор, нулевом и мнимом нулевом векторных операторах, псевдовекторах и комбинированных векторах. Приведен ряд разложений с использованием введенных операций.

Ключевые слова: вектор, оператор, поверхностный, координаты, градиент, дивергенция, ротор, ортоположительный, ортоотрицательный.

Введение

Работа посвящена рассмотрению ряда операций на пространстве гладких функций и векторных полей в $\mathbb{R}^3$ [1-3]. В качестве исходного пункта могут выступать нулевые величины. Их можно условно разделить на две категории. К первой категории относятся величины, содержимое которых «пусто». Ко второй – состоящие из величин, сумма которых равна нулю. К последней категории относится векторное произведение оператора Гамильтона (НАБЛА) на самого себя. При этом использование взаимно противоположных компонентов этого произведения создает определенные перспективы, в частности, развития элементов *поверхностного векторного анализа*, приложением которого может быть определение энергетических параметров силовых, например электромагнитных, полей [4-9]. К таким элементам могут быть отнесены векторный дифференциальный поверхностный оператор, поверхностный градиент, производная по произвольной поверхности, поверхностные дивергенция и ротор, являющиеся аналогами соответствующих величин первого порядка. Названные операции относятся к поверхностному дифференцированию, которое можно рассматривать в качестве обратной задачи к поверхностному интегрированию. Перечисленные операции используются для получения разложений ряда векторных представлений второго порядка, часть которых имеет аналоги первого порядка. В ряде случаев для этого придется прибегнуть к специальным методам, таким, как сопряжение векторов, использование линейной комбинации координат, ее деление на вектор, введение нулевого и мнимого нулевого векторных операторов, псевдовекторов [10] и комбинированных векторов.

1*. Слагаемые векторных произведений

Для векторов $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{H}$ имеет место операция векторного произведения

$$\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H}=\left(G_yH_z-G_zH_y\right)\boldsymbol{i}+\left(G_zH_x-G_xH_z\right)\boldsymbol{j}+\left(G_xH_y-G_yH_x\right)\boldsymbol{k}.$$

Его можно представить в виде

$$\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H}=\left(G_yH_z\boldsymbol{i}+G_zH_x\boldsymbol{j}+G_xH_y\boldsymbol{k}\right)-\left(G_zH_y\boldsymbol{i}+G_xH_z\boldsymbol{j}+G_yH_x\boldsymbol{k}\right).$$

$\boldsymbol{\mathcal{Df}}$ **1.1.** Операция $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H}:=G_yH_z\boldsymbol{i}+G_zH_x\boldsymbol{j}+G_xH_y\boldsymbol{k}$ является первой или ортоположительной частью векторного произведения $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H}$ векторных полей

$$\boldsymbol{G}=G_x\boldsymbol{i}+G_y\boldsymbol{j}+G_z\boldsymbol{k}\text{ и }\boldsymbol{H}=H_x\boldsymbol{i}+H_y\boldsymbol{j}+H_z\boldsymbol{k}.$$

* Используемые обозначения $\boldsymbol{\mathcal{Df}}$ – определение; $\boldsymbol{\mathcal{Th}}$ – теорема; $\boldsymbol{\mathcal{Imp}}$ – следствие; $\boldsymbol{\mathcal{Note}}$ – замечание; $\boldsymbol{\mathcal{Ex}}$ – пример.

$\mathcal{Df}$ **1.2.** Операция $\boldsymbol{G} \times_{II} \boldsymbol{H} := \boldsymbol{G} \times_{I} \boldsymbol{H} = G_z H_y \boldsymbol{i} + G_x H_z \boldsymbol{j} + G_y H_x \boldsymbol{k}$ является *второй или орто-отрицательной частью векторного произведения*.

Очевидно, что $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G} \times_I \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \times_I \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G} \times_I \boldsymbol{H} - \boldsymbol{G} \times_{II} \boldsymbol{H}$.

Все вышесказанное справедливо и для ротора.

$\mathcal{Df}$ **1.3.** Операция

$$rot_I \boldsymbol{M} := \nabla \times_I \boldsymbol{M} = \frac{\partial M_z}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial M_x}{\partial z}\boldsymbol{j} + \frac{\partial M_y}{\partial x}\boldsymbol{k}$$

является *первой или ортоположительной частью ротора* $rot\,\boldsymbol{M}$ *векторного поля*

$$\boldsymbol{M} = M_x \boldsymbol{i} + M_y \boldsymbol{j} + MG_z \boldsymbol{k}.$$

$\mathcal{Df}$ **1.4.** Операция

$$rot_{II} \boldsymbol{M} := \nabla \times_{II} \boldsymbol{M} = \frac{\partial M_y}{\partial z}\boldsymbol{i} + \frac{\partial M_z}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial M_x}{\partial y}\boldsymbol{k}$$

является *второй или ортоотрицательной частью ротора* $rot\,\boldsymbol{M}$.

Очевидно, что $rot\,\boldsymbol{M} = rot_I \boldsymbol{M} - rot_{II} \boldsymbol{M}$ или $\nabla \times \boldsymbol{M} = \nabla \times_I \boldsymbol{M} - \nabla \times_{II} \boldsymbol{M}$.

2. Сопряженные векторы

$\mathcal{Df}$ **2.1.** Операция

$$\boldsymbol{G} \times^* \boldsymbol{H} := \boldsymbol{G} \times_I \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \times_I \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G} \times_I \boldsymbol{H} + \boldsymbol{G} \times_{II} \boldsymbol{H}$$

является *сопряженным векторным произведением* векторных полей $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{H}$.

$\mathcal{Df}$ **2.2.** Операция

$$rot^* \boldsymbol{M} := rot_I \boldsymbol{M} + rot_{II} \boldsymbol{M} \text{ или } \nabla \times^* \boldsymbol{M} = \nabla \times_I \boldsymbol{M} + \nabla \times_{II} \boldsymbol{M}.$$

является *сопряженным ротором векторного поля* $\boldsymbol{M}$.

$\mathcal{Df}$ **2.3.** Оператор

$$\nabla_S := \nabla \times_I \nabla = \nabla \times_{II} \nabla = \frac{\nabla \times^* \nabla}{2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\boldsymbol{k}$$

является векторным дифференциальным поверхностным оператором.

3. Поверхностный градиент и производная по поверхности

$\mathcal{Df}$ **3.1.** Вектор

$$\mathrm{grad}_S W := \nabla_S W = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\boldsymbol{k} \quad (3.1)$$

является поверхностным градиентом функции W.

По аналогии с производной по направлению вычисляется *производная по поверхности*

$$\frac{d_S^2 W}{d\sigma} := (\mathrm{grad}_S W) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} cos\varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} cos\psi + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} cos\theta, \quad (3.2)$$

где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i} cos\varphi + \boldsymbol{j} cos\psi + \boldsymbol{k} cos\theta$ – поле единичных нормалей поверхности дифференцирования.

$\mathcal{Th}$ **3.1.** *Производная функции* $W(x, y, z)$ *(скалярного поля) по некоторой поверхности равна проекции поверхностного градиента на единичный вектор нормали к этой поверхности (в соответствующей точке)*

$$\frac{d_S^2 W}{d\sigma} = |\mathrm{grad}_S W| cos(\mathrm{grad}_S W, \boldsymbol{n}).$$

Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из (3.2).

$\mathcal{Imp}$ **3.1.** *Поверхностный градиент скалярного поля равен по величине производной поля по поверхности, для которой эта производная (в соответствующей точке) является максимальной, и совпадает по направлению с единичным вектором нормали к этой поверхности*

$$max\left\{\frac{d_S^2 W}{d\sigma}\right\} = |\mathrm{grad}_S W| = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2}.$$

Пусть для функции $U(x, y, z)$, все слагаемые которой являются функциями не менее чем двух переменных, имеющей смешанные частные производные второго порядка, по крайней мере, одна из смешанных частных производных второго порядка от любого слагаемого не обращается в нуль. Для однообразия терминологии такая функция может быть названа *поверхностной*.

$\mathcal{Th}$ **3.2.** *Поверхностная функция* $U(x,y,z)$ *может быть восстановлена по ее поверхностному градиенту* $\boldsymbol{G}$ *в соответствии с формулой*

$$\mathrm{U}=\iint G_x dydz+\iint G_y dxdz+\iint G_z dxdy-2\mathrm{V}=$$
$$=P_1(x,y,z)+P_2(y,z)+Q_1(x,y,z)+Q_2(x,z)+R_1(x,y,z)+R_2(x,y)-2V.$$

При этом $V=P_1=Q_1=R$, а интегралы понимаются как повторные неопределенные с нулевыми аддитивными составляющими.

Доказательство

$$\frac{\partial G_x}{dx}=\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial G_y}{dy}=\frac{\partial G_z}{dz}. \qquad (3.3)$$

Функцию U можно искать в виде

$$\mathrm{U}=\iint G_x dydz+\iint G_y dxdz+\iint G_z dxdy.$$

При этом

$$\iint \mathrm{G_x dydz}=P_1(x,y,z)+P_2(y,z), \qquad \frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\iint G_y dxdz=\frac{\partial G_y}{dy}=\frac{\partial^3 Q_1}{\partial x\partial y\partial z},$$
$$\iint G_z dxdy=R_1(x,y,z)+R_2(x,y), \qquad \frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\iint G_x dydz=\frac{\partial G_x}{dx}=\frac{\partial^3 P_1}{\partial x\partial y\partial z},$$
$$\iint G_y dxdz=Q_1(x,y,z)+Q_2(x,z), \qquad \frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\iint G_z dxdy=\frac{\partial G_z}{dz}=\frac{\partial^3 R_1}{\partial x\partial y\partial z}.$$

С учетом (3.3) и $P_1=Q_1=R_1=V(x,y,z)$, получим, что $f(x,y,z)=-2V$. При этом

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left[\iint G_x dydz+\iint G_y dxdz+\iint G_z dxdy\right]=$$
$$=G_x+\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}[Q_1+Q_2(x,z)+R_1+R_2(x,y)-2V]=G_x.$$

Аналогично $\partial^2\mathrm{U}/\partial\mathrm{x}\,\partial z=\mathrm{G_y}$ и $\partial^2\mathrm{U}/\partial\mathrm{x}\,\partial\mathrm{y}=\mathrm{G}_z$. ■

$\mathcal{Note}$ **1**. Равенство нулю аддитивных составляющих повторных неопределенных интегралов вытекает из того, что в поверхностных функциях соответствующих слагаемых нет.

$\mathcal{Note}$ **2**. Поверхностная функция может быть восстановлена по ее поверхностному градиенту и с помощью поверхностного интеграла, однако это решение может оказаться более громоздким из-за необходимости определения поверхности интегрирования. Кроме того, при поверхностном интегрировании могут появляться константы и функции одной переменной, вследствие чего возникает необходимость прибегать к их отбрасыванию.

$\mathcal{Ex}$ **3.1.**

$$\mathrm{grad}_S U=\left(3z^2-\frac{x}{y^2}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{y}-sin(x+z)\right)\boldsymbol{j}+\left(2y-\frac{z}{y^2}\right)\boldsymbol{k},$$
$$U=yz^3+\frac{xz}{y}+\frac{xz}{y}+sin(x+z)+xy^2+\frac{xz}{y}-2\frac{xz}{y}=yz^3+\frac{xz}{y}+sin(x+z)+xy^2.$$

4. Поверхностная дивергенция и поверхностный ротор

В (3.1) имеет место произведение вектора ∇_S на скаляр W. Могут быть рассмотрены скалярное и векторное произведения ∇_S на вектор M.

$\mathcal{Df}$ **4.1.** Операция

$$div_S\boldsymbol{M}\coloneqq\nabla_S\cdot\boldsymbol{M}=\frac{\partial^2 M_x}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 M_z}{\partial x\partial y}$$

является поверхностной дивергенцией векторного поля M.

$\mathcal{Df}$ **4.2.** Операция

$$rot_S\boldsymbol{M} \coloneqq \nabla_S \times \boldsymbol{M} = \left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

является поверхностным ротором векторного поля M.

$\boldsymbol{\mathcal{D}\oint}$ **4. 3.** Операция

$$rot_{S,I}\boldsymbol{M} \coloneqq \nabla_S \times_I \boldsymbol{M} = \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z}\boldsymbol{k}$$

является *первой или ортоположительной частью поверхностного ротора* c.

$\boldsymbol{\mathcal{D}\oint}$ **4. 4.** Операция

$$rot_{S,II}\boldsymbol{M} \coloneqq \nabla_S \times_{II} \boldsymbol{M} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z}\boldsymbol{k}$$

является *второй или ортоотрицательной частью поверхностного ротора* $rot_S\boldsymbol{M}$.

$$rot_S M = rot_{S,I}\boldsymbol{M} - rot_{S,II}\boldsymbol{M} \text{ или } \nabla_S \times \boldsymbol{M} = \nabla_S \times_I \boldsymbol{M} - \nabla_S \times_{II} \boldsymbol{M}.$$

$\boldsymbol{\mathcal{D}\oint}$ **4. 5.** Операция

$$rot_S^*{:} = rot_{S,I}\boldsymbol{M} + rot_{S,II}\boldsymbol{M} \text{ или } \nabla_S \times^* \boldsymbol{M}{:} = \nabla_S \times_I \boldsymbol{M} + \nabla_S \times_{II} \boldsymbol{M}$$

является *сопряженным поверхностным ротором векторного поля* $\boldsymbol{M}$.

5. Некоторые формулы

$$\nabla_S(\alpha V + \beta W) = \alpha\nabla_S V + \beta\nabla_S W, \text{ где } \alpha = const, \beta = const.$$
$$\nabla_S \cdot (\alpha\boldsymbol{E} + \beta\boldsymbol{F}) = \alpha\nabla_S \cdot \boldsymbol{E} + \beta\nabla_S \cdot \boldsymbol{F} \text{ и } \nabla_S \times (\alpha\boldsymbol{E} + \beta\boldsymbol{F}) = \alpha\nabla_S \times \boldsymbol{E} + \beta\nabla_S \times \boldsymbol{F};$$
$$\Delta_S \equiv \nabla_S \cdot \nabla_S \equiv \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \text{ и } \nabla \cdot \nabla_S \equiv \nabla_S \cdot \nabla \equiv 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z};$$
$$\nabla \times \nabla_S \equiv -\nabla_S \times \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{k};$$
$$\nabla \times_I \nabla_S = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^3}{\partial z \partial x^2}\boldsymbol{j} \text{ и } \nabla \times_{II} \nabla_S = \frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2}\boldsymbol{j};$$
$$\Delta_S W \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial ч^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\right)W(x,y,z) = div_S grad_S W = \nabla_S \cdot \nabla_S W;$$
$$\Delta_S(\alpha V + \beta W) = \alpha\Delta_S V + \beta\Delta_S W \text{ и } \Delta_S\boldsymbol{F} = \Delta_S F_x\boldsymbol{i} + \Delta_S F_y\boldsymbol{j} + \Delta_S F_z\boldsymbol{k};$$
$$divrot_S\boldsymbol{F} = \nabla \cdot (\nabla_S \times \boldsymbol{F}) = -div_S rot\boldsymbol{F} = -\nabla_S \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F});$$
$$graddiv_S\boldsymbol{F} = \nabla(\nabla_S \cdot \boldsymbol{F}) = \nabla_S \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) + (\nabla \cdot \nabla_S)\boldsymbol{F};$$
$$grad_S div\boldsymbol{F} = \nabla_S(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) = \nabla \times (\nabla_S \times \boldsymbol{F}) + (\nabla \cdot \nabla_S)\boldsymbol{F};$$
$$grad_S div_S\boldsymbol{F} = \nabla_S(\nabla_S\nabla \cdot \boldsymbol{F}) = \nabla_S \times (\nabla_S \times \boldsymbol{F}) + \Delta_S\boldsymbol{F};$$
$$rotrot_S\boldsymbol{F} = \nabla \times (\nabla_S \times \boldsymbol{F}) = \nabla_S(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - (\nabla \cdot \nabla_S)\boldsymbol{F};$$
$$rot_S rot\boldsymbol{F} = \nabla_S \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla_S \cdot \boldsymbol{F}) - (\nabla \cdot \nabla_S)\boldsymbol{F};$$
$$rot_S rot_S\boldsymbol{F} = \nabla_S \times (\nabla_S \times \boldsymbol{F}) = \nabla_S(\nabla_S \cdot \boldsymbol{F}) - \Delta_S\boldsymbol{F};$$
$$rot_S grad_S W = \nabla_S \times \nabla_S W \equiv 0 \text{ и } div_S rot_S\boldsymbol{F} = \nabla_S \cdot (\nabla_S \times \boldsymbol{F}) \equiv 0;$$
$$\nabla_S(VW) = W\nabla_S V + V\nabla_S W + \nabla V \times^* \nabla W \text{ и } \nabla_S(W\boldsymbol{F}) = W\nabla_S \cdot \boldsymbol{F} + (\nabla_S W) \cdot \boldsymbol{F} + \nabla W \cdot (\nabla \times^* \boldsymbol{F}).$$

Известные методы не позволяют получить аналогичные формулы для выражений $\nabla_S(F \cdot G), \nabla_S(F \times G), (G \cdot \nabla_S)WF, \nabla_S \times (WF), \nabla_S \times (F \times G), (G \cdot \nabla_S)F, \Delta_S(VW)$. Для их получения, а также для решения других задач существующий арсенал средств операций с векторами может быть расширен за счет введения в рассмотрение линейной комбинации координат и ее деления на вектор, нулевого и мнимого нулевого векторных дифференциальных операторов, псевдовекторов и комбинированных векторов.

6. Линейная комбинация координат

В результате операций над векторными функциями, например, скалярного произведения, взятия дивергенции и т.п., появляются скалярные функции вида

$$W_C = \left(W_x + W_y + W_z\right)_C. \tag{6.1}$$

Такая функция является *линейной комбинацией координат*. Ее особенностью является то, что подобные, входящие в состав слагаемых W_x, W_y, W_z, не приведены.

$\mathcal{Ex}$ **6.1.**

$$W_C = \boldsymbol{F} \tilde{\cdot} \boldsymbol{G} = (xy^2z\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}) \tilde{\cdot} (z\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = (xy^2z^2 + xy^2z^2 + yz)_C$$

– линейная комбинация координат, а $W = 2xy^2z^2 + yz$ – линейной комбинацией координат не является.

Здесь и далее волнистой чертой «~» помечена операция, результатом которой является сумма с неприведенными слагаемыми.

Может быть введена операция деления линейной комбинации координат на вектор

$$\boldsymbol{F} = \frac{W_C}{\boldsymbol{G}} = W_C \cdot \boldsymbol{G}^{-1} = \frac{\left(W_x + W_y + W_z\right)_C}{G_x\boldsymbol{i} + G_y\boldsymbol{j} + G_z\boldsymbol{k}} = \frac{W_x}{G_x}\boldsymbol{i} + \frac{W_y}{G_y}\boldsymbol{j} + \frac{W_z}{G_z}\boldsymbol{k}. \qquad (6.2)$$

Действительно,

$$F_xG_x = W_x;\ F_yG_y = W_y; F_zG_z = W_z \implies F_x = \frac{W_x}{G_x};\ F_y = \frac{W_y}{G_y};\ F_z = \frac{W_z}{G_z};$$

$$\left(\frac{W_x}{G_x}\boldsymbol{i} + \frac{W_y}{G_y}\boldsymbol{j} + \frac{W_z}{G_z}\boldsymbol{k}\right) \cdot \left(G_x\boldsymbol{i} + G_y\boldsymbol{j} + G_z\boldsymbol{k}\right) = W_C.$$

W_C, в отличие от W, содержит информацию, достаточную для восстановления одного из векторов-сомножителей при известном другом.

$$\frac{\boldsymbol{F} \tilde{\cdot} \boldsymbol{G}}{\boldsymbol{G}} = \frac{F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z}{G_x\boldsymbol{i} + G_y\boldsymbol{j} + G_z\boldsymbol{k}} = \frac{F_xG_x}{G_x}\boldsymbol{i} + \frac{F_yG_y}{G_y}\boldsymbol{j} + \frac{F_zG_z}{G_z}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{F}.$$

$\mathcal{Ex}$ **6.2.** См. данные примера 6.1.

$$\boldsymbol{F} = \frac{(xy^2z^2 + xy^2z^2 + yz)_C}{z\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}} = \frac{xy^2z^2}{z}\boldsymbol{i} + \frac{xy^2z^2}{xy}\boldsymbol{j} + \frac{yz}{z}\boldsymbol{k} = xy^2z\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}.$$

Линейную комбинацию координат можно делить на любой вектор, а не только на один из сомножителей, которые ее образовали

$$\frac{\boldsymbol{F} \tilde{\cdot} \boldsymbol{G}}{\boldsymbol{H}} = \frac{F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z}{H_x\boldsymbol{i} + H_y\boldsymbol{j} + HG_z\boldsymbol{k}} = \frac{F_xG_x}{H_x}\boldsymbol{i} + \frac{F_yG_y}{H_y}\boldsymbol{j} + \frac{F_zG_z}{H_z}\boldsymbol{k}.$$

$\mathcal{Ex}$ **6.3.**

$$\boldsymbol{F} = \frac{(xy^2z^2 + xy^2z^2 + yz)_C}{0{,}5x^2y^2\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}} = \frac{xy^2z^2}{0{,}5x^2y^2}\boldsymbol{i} + \frac{xy^2z^2}{yz}\boldsymbol{j} + \frac{yz}{zyz}\boldsymbol{k} = \frac{2z^2}{x}\boldsymbol{i} + xyz\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

$\mathcal{Note}$ **3.** В общем виде линейная комбинация координат имеет вид

$$W_C^* = \left(\alpha W_x + \beta W_y + \gamma W_z\right)_C,$$

где α, β, γ – постоянные коэффициенты. Последнее выражение может быть получено из (6.1) следующим образом:

$$W_C^* = \frac{W_C}{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}} \tilde{\cdot} (\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}) = \left(W_x\boldsymbol{i} + W_y\boldsymbol{j} + W_z\boldsymbol{k}\right) \tilde{\cdot} (\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}) =$$
$$= \left(\alpha W_x + \beta W_y + \gamma W_z\right)_C.$$

7. Нулевой векторный оператор

Может быть рассмотрена следующая задача. Имеются две линейные комбинации координат W_C и V_C. Найти формулы, связывающие W_C и V_C с выражениями

$$\left(W_xV_x + W_yV_y + W_zV_z\right)_C \text{ и } \left(W_xV_y + W_yV_z + W_zV_x\right)_C.$$

Для решения этих и подобных задач может быть введен нулевой векторный оператор

$$\nabla_0 = \frac{\partial^0}{\partial x^0}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^0}{\partial y^0}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^0}{\partial z^0}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Некоторые свойства

$$\nabla_0 U = \boldsymbol{i}U + \boldsymbol{j}U + \boldsymbol{k}U.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве *нулевого градиента* $\boldsymbol{G}_0$ функции U.

$$\boldsymbol{G}_0 = grad_0 U = \nabla_0 U.$$

$$\nabla_0 \tilde{\cdot} \boldsymbol{F} = F_C = \left(F_x + F_y + F_z\right)_C.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве *нулевой дивергенции* векторного поля $\boldsymbol{F}$: $div_0\boldsymbol{F} = \nabla_0 \tilde{\cdot} \boldsymbol{F}$.

$$\nabla_0 \times \boldsymbol{F} = (F_z - F_y)\boldsymbol{i} + (F_x - F_z)\boldsymbol{j} + (F_y - F_x)\boldsymbol{k}.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве *нулевого ротора* векторного поля $\boldsymbol{F}$: $\mathrm{rot}_0\nabla_0 \times \boldsymbol{F}$.

$$\nabla_0 \cdot (\nabla_0 \times \boldsymbol{F}) = div_0\,(\mathrm{rot}_0\boldsymbol{F}) \equiv 0.$$

Из (6.2)

$$\frac{W_C}{\nabla_0} = \nabla_0^{-1}(W_x + W_y + W_z)_C = W_x\boldsymbol{i} + W_y\boldsymbol{j} + W_z\boldsymbol{k} = W.$$

$$\nabla_0 \tilde{\cdot} (\nabla_0^{-1} \cdot W_C) = W_C;\ \nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \tilde{\cdot} \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F};\ \nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \tilde{\cdot} \nabla_0) = \nabla_0;$$

$$\nabla_0 \cdot \nabla_S = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};\ \nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \tilde{\cdot} \nabla_S) = \nabla_S;\ \nabla_0 \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \tilde{\cdot} \nabla) = \nabla;\ \nabla_0^{-1} \cdot \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\boldsymbol{k};\ \nabla_0 \cdot (\nabla_0^{-1} \cdot \Delta) = \Delta;$$

$$\nabla_0 \times_I \nabla_0 = \nabla_0 \times_{II} \nabla_0 = \frac{\nabla_0 \times^* \nabla_0}{2} = \nabla_0.$$

Возвращаясь к задаче, приведенной в начале параграфа

$$(W_xV_x + W_yV_y + W_zV_z)_C = (\nabla_0^{-1} \cdot W_C) \tilde{\cdot} (\nabla_0^{-1}V_C),$$

$$(W_xV_y + W_yV_z + W_zV_x)_C = \nabla_0 \tilde{\cdot} [(\nabla_0^{-1} \cdot W_C) \times_I (\nabla_0^{-1}V_C)].$$

Таким образом, применение нулевого векторного оператора позволяет решать подобные задачи.

Представление полного дифференциала функции с помощью векторных операторов

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz = (\nabla W) \cdot (\nabla_0^{-1}dS_1),$$

где dS_1 – полный дифференциал элементарной симметрической функции

$$S_1 \equiv x + y + z.$$

С помощью нулевого векторного оператора можно, например, преобразовать вектор в линейную комбинацию координат, выполнить некие операции, а затем результат преобразовать обратно в вектор. И наоборот, сначала линейную комбинацию координат преобразовать в вектор, выполнить векторные операции, а результат преобразовать в линейную комбинацию координат.

8. Мнимый нулевой векторный оператор

Может быть рассмотрена следующая задача. Имеются линейная комбинация координат W_C и вектор $\boldsymbol{F}$. Найти формулу, связывающую W_C и $\boldsymbol{F}$ с выражением

$$F_xW_x\boldsymbol{i} + F_yW_y\boldsymbol{j} + F_zW_z\boldsymbol{k}.$$

Для решения подобных задач может быть введен мнимый нулевой векторный оператор

$$\{\nabla_0\} = \left\{\frac{\partial^0}{\partial x^0}\boldsymbol{i}\right\} + \left\{\frac{\partial^0}{\partial y^0}\boldsymbol{j}\right\} + \left\{\frac{\partial^0}{\partial z^0}\boldsymbol{k}\right\} = \{\boldsymbol{i}\} + \{\boldsymbol{j}\} + \{\boldsymbol{k}\}.$$

Его главное отличие от оператора ∇_0 заключается в том, что псевдоорты (мнимые орты) $\{\boldsymbol{i}\}$, $\{\boldsymbol{j}\}$, $\{\boldsymbol{k}\}$ с ортами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ не взаимодействуют, а взаимодействуют только с псевдоортами. Поэтому правила применения оператора $\{\nabla_0\}$ по отношению к векторам такие же, как и оператора ∇_0 в отношении линейных комбинаций координат.

Некоторые свойства $\{\nabla_0\}$.

$$\{\nabla_0\}U = U\{\boldsymbol{i}\} + U\{\boldsymbol{j}\} + U\{\boldsymbol{k}\}.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве *мнимого нулевого градиента* $\{\boldsymbol{G}_0\}$ функции U

$$\{\boldsymbol{G}_0\} = \{grad_0U\} = \{\nabla_0\}U.$$

$$\frac{W_C}{\{\nabla_0\}} = \{\nabla_0^{-1}\}(W_x + W_y + W_z)_C = W_x\{\boldsymbol{i}\} + W_y\{\boldsymbol{j}\} + W_z\{\boldsymbol{k}\}.$$

$$\{\nabla_0\}\,\tilde{\cdot}\,(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot W_C)=W_C;\ \{\nabla_0^{-1}\}\cdot(\{\nabla_0\}\,\tilde{\cdot}\,\{\nabla_0\})=\{\nabla_0\};$$

$$\frac{\boldsymbol{F}}{\{\nabla_0\}}=\{\nabla_0^{-1}\}\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}\{\boldsymbol{i}\}+F_y\boldsymbol{j}\{\boldsymbol{j}\}+F_z\boldsymbol{k}\{\boldsymbol{k}\};\ \{\nabla_0\}\cdot(\{\nabla_0^{-1}\}\,\tilde{\cdot}\,\boldsymbol{F})=\boldsymbol{F};$$

$$\{\nabla_0\}\times(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\boldsymbol{F})=\left(F_z\boldsymbol{k}-F_y\boldsymbol{j}\right)\{\boldsymbol{i}\}+(F_x\boldsymbol{i}-F_z\boldsymbol{k})\{\boldsymbol{j}\}+\left(F_y\boldsymbol{j}-F_x\boldsymbol{i}\right)\{\boldsymbol{k}\};$$

$$\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla_S=\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\boldsymbol{i}\{\boldsymbol{i}\}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\boldsymbol{j}\{\boldsymbol{j}\}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\boldsymbol{k}\{\boldsymbol{k}\};\ \{\nabla_0\}\cdot(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla_S)=\nabla_S;$$

$$\{\nabla_0\}\times(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla_S)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\boldsymbol{k}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\boldsymbol{j}\right)\{\boldsymbol{i}\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\boldsymbol{i}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\boldsymbol{k}\right)\{\boldsymbol{j}\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\boldsymbol{j}-\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\boldsymbol{i}\right)\{\boldsymbol{k}\}.$$

$$\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}\{\boldsymbol{i}\}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}\{\boldsymbol{j}\}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\{\boldsymbol{k}\};\ \{\nabla_0\}\times(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla)=\nabla;$$

$$\{\nabla_0\}\times(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla)=\left(\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}-\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)\{\boldsymbol{i}\}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\{\boldsymbol{j}\}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}-\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}\right)\{\boldsymbol{k}\};$$

$$\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\boldsymbol{i}\}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\boldsymbol{j}\}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\boldsymbol{k}\};\ \{\nabla_0\}\cdot(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\Delta)=\Delta;$$

$$\{\nabla_0\}\cdot[\{\nabla_0\}\times(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot W_C)]=0;\ \{\nabla_0\}\times_I\{\nabla_0\}=\{\nabla_0\}\times_{II}\{\nabla_0\}=\frac{\{\nabla_0\}\times^*\{\nabla_0\}}{2}=\{\nabla_0\}.$$

Возвращаясь к задаче, приведенной в начале параграфа:

$$F_xW_x\boldsymbol{i}+F_yW_y\boldsymbol{j}+F_zW_z\boldsymbol{k}=\{\nabla_0\}\cdot[(\nabla_0\cdot\boldsymbol{F})\times_I(\{\nabla_0^{-1}\}\,\tilde{\cdot}\,W_C)].$$

Таким образом, применение мнимого нулевого векторного оператора позволяет решать подобные задачи. Другими словами, применение $\{\nabla_0\}$ позволяет сохранить орты исходного вектора.

9. Псевдовекторы и комбинированные векторы

Применение мнимого векторного оператора приводит к появлению псевдовекторов. В частности, $\{\boldsymbol{i}\}$, $\{\boldsymbol{j}\}$, $\{\boldsymbol{k}\}$ являются псевдоортами.

$\boldsymbol{\mathcal{Df}}$ $\mathbf{9.1}$. *Псевдовектор* – это скаляр, в котором содержится информация о *включенном* в него векторе.

Псевдовектор может быть обозначен следующим образом:

$$A^{\{\boldsymbol{P}\}}=A\left\{\frac{\boldsymbol{P}}{P}\right\}=\frac{A}{P}\{P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{J}+P_z\boldsymbol{k}\}.$$

Из представленных выше выражений значительная часть является *комбинированными векторами*, т.е. сочетаниями векторов и псевдовекторов.

Комбинированный вектор может быть обозначен следующим образом:

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{F}}^{\{\boldsymbol{P}\}}=B\left\{\frac{\boldsymbol{P}}{P}\right\}\frac{\boldsymbol{F}}{F}.$$

Нижний индекс содержит информацию о направлении вектора, верхний индекс – информацию о направлении псевдовектора.

При выполнении операций с комбинированными векторами орты взаимодействуют с ортами, а псевдоорты – с псевдоортами. Орты и псевдоорты между собой не взаимодействуют.

При умножении комбинированного вектора на другой комбинированный вектор могут использоваться следующие четыре формы записи операций умножения:

$$«\{\cdot\}\cdot», «\{\cdot\}\times», «\{\times\}\cdot», «\{\times\}\times».$$

Действие знака произведения, расположенного в скобках, распространяется на псевдовекторные составляющие комбинированных векторов, а расположенного за скобками – на векторные.

$\boldsymbol{\mathcal{Ex}}$ $\mathbf{9.1}$.

$$\left(W_x\{\boldsymbol{i}\}\boldsymbol{j}+W_y\{\boldsymbol{j}\}\boldsymbol{k}+W_z\{\boldsymbol{k}\}\boldsymbol{i}\right)\{\cdot\}\times\left(V_x\{\boldsymbol{i}\}\boldsymbol{k}+V_y\{\boldsymbol{j}\}\boldsymbol{i}+V_z\{\boldsymbol{k}\}\boldsymbol{j}\right)=W_xV_x\boldsymbol{i}+W_yV_y\boldsymbol{j}+W_zV_z\boldsymbol{k}.$$

При перемножении псевдовектора и комбинированного вектора нет необходимости размещения знака произведения в скобки. Очевидно, что знак произведения « ·» или «×» в этом случае распространяется на псевдовекторные составляющие.

Величина

$$div_0\{\boldsymbol{F}\} = \{\nabla_0\} \tilde{\cdot} \{\boldsymbol{F}\} = \left(F_x + F_y + F_z\right)_C$$

может рассматриваться в качестве *мнимой нулевой дивергенции* мнимого векторного поля $\{\boldsymbol{F}\}$. Она совпадает с *нулевой дивергенцией* векторного поля $\boldsymbol{F}$.

Величина

$$rot_0\{\boldsymbol{F}\} = \{\nabla_0\} \times \{\boldsymbol{F}\} = \left(F_z - F_y\right)\{\boldsymbol{i}\} + (F_x - F_z)\{\boldsymbol{j}\} + \left(F_y - F_x\right)\{\boldsymbol{k}\}$$

может рассматриваться в качестве *мнимого нулевого ротора* мнимого векторного поля $\{\boldsymbol{F}\}$.

$$\{\nabla_0\} \cdot (\{\nabla_0\} \times \{\boldsymbol{F}\}) = div_0\{(rot_0\{\boldsymbol{F}\})\} \equiv 0.$$

С помощью мнимого нулевого векторного оператора можно преобразовать вектор в комбинированный вектор, выполнить некие операции, а затем результат преобразовать обратно в вектор. И наоборот, сначала комбинированный вектор преобразовать в вектор, выполнить векторные операции, а результат преобразовать в комбинированный вектор.

10. Некоторые формулы (продолжение)

$$\nabla_S(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) = \nabla_0^{-1}\{[\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_S \tilde{\cdot} \boldsymbol{F})] \tilde{\cdot} \boldsymbol{G} + [\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_S \tilde{\cdot} \boldsymbol{G})] \tilde{\cdot} \boldsymbol{F}\} =$$
$$= \boldsymbol{G} \times_I (\nabla_S \times \boldsymbol{F}) + \boldsymbol{F} \times_I (\nabla_S \times \boldsymbol{G}) + (\nabla \times_I \boldsymbol{F}) \times_I (\nabla \times_{II} \boldsymbol{G}) + (\nabla \times_I \boldsymbol{G}) \times_I (\nabla \times_{II} \boldsymbol{F}) =$$
$$= \{\nabla_0\} \cdot \{[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \tilde{\cdot} \boldsymbol{F})] \times_I [\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G})] + [\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \tilde{\cdot} \boldsymbol{G})] \times_I [\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F})]\}.$$

$$\nabla_S(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot (\nabla_S \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla_S \times \boldsymbol{G}) - (\nabla \times_I \boldsymbol{F}) \cdot (\nabla \times_{II} \boldsymbol{G}) +$$
$$+(\nabla \times_{II} \boldsymbol{F}) \cdot (\nabla \times_I \boldsymbol{G}) + \nabla_0 \cdot \{[\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla \tilde{\cdot} \boldsymbol{F})] \times [\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla \tilde{\cdot} \boldsymbol{G})]\}.$$

$$(\boldsymbol{G} \cdot \nabla_S)W\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \cdot \nabla_S W) + W(\boldsymbol{G} \cdot \nabla_S)\boldsymbol{F} +$$
$$\left\{\{\nabla_0^{-1}\} \cdot [\boldsymbol{G} \times^* (\nabla W)]\right\} \cdot [\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \tilde{\cdot} \boldsymbol{F})] + [\boldsymbol{G} \times^* (\nabla W) \times_{II} (\nabla \times \boldsymbol{F})].$$

При этом

$$\left\{\{\nabla_0^{-1}\} \cdot [\boldsymbol{G} \times^* (\nabla W)]\right\} \cdot [\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \tilde{\cdot} \boldsymbol{F})] = \nabla_0^{-1}\{[\boldsymbol{G} \times^* (\nabla W)] \tilde{\cdot} \nabla_0^{-1} \cdot (\nabla \tilde{\cdot} \boldsymbol{F})\}.$$
$$[\boldsymbol{G} \times^* (\nabla W)] \times_{II} (\nabla \times \boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{G} \times_I (\nabla W)] \times_{II} (\nabla \times \boldsymbol{F}) + [\boldsymbol{G} \times_{II} (\nabla W)] \times_{II} (\nabla \times \boldsymbol{F}).$$

$$\nabla_S \times (W\boldsymbol{F}) = \nabla_S W \times \boldsymbol{F} + W\nabla_S \times \boldsymbol{F} + [\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla W)] \cdot \left\{\{\nabla_0\} \times [\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \tilde{\cdot} \boldsymbol{F})]\right\} +$$
$$+(\nabla \times_I \boldsymbol{F}) \times_I \nabla W + \nabla W \times_{II} (\nabla \times_{II} \boldsymbol{F}).$$

$$\nabla_S \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G} \cdot \nabla_S)\, \boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}(\nabla_S \cdot \boldsymbol{F}) - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla_S)\, \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}(\nabla_S \cdot \boldsymbol{G}) +$$
$$+\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \tilde{\cdot} \boldsymbol{F}) \cdot [\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \times^* \boldsymbol{G})] - \{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \cdot^* \boldsymbol{G}) \cdot [\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla \times^* \boldsymbol{F}] +$$
$$+(\nabla \times_I \boldsymbol{F}) \times (\nabla \times_I \boldsymbol{G}) - (\nabla \times_{II} \boldsymbol{F}) \times (\nabla \times_{II} \boldsymbol{G}).$$

$$(G \cdot \nabla_S)\, F = (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \boldsymbol{G}) \cdot (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla_S \cdot \boldsymbol{F}) + \boldsymbol{G} \times_{II} (\nabla_S \times \boldsymbol{F}) =$$
$$= \{\nabla_0^{-1}\} \cdot \{\boldsymbol{G} \tilde{\cdot} [\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_S \tilde{\cdot} F)]\} + \boldsymbol{G} \times_{II} (\nabla_S \times \boldsymbol{F}).$$

$$\Delta_S(VW) = (\Delta_S V)W + (\Delta_S W)V + 4(\nabla_S V)(\nabla_S W) +$$
$$+2\nabla V \cdot (\nabla \times^* \nabla_S W) + 2\nabla W \cdot (\nabla \times^* \nabla_S V) + \nabla_0 \cdot [(\nabla_0^{-1}\Delta V) \times^* (\nabla_0^{-1}\Delta W)].$$

Без применения «расщепления» векторных произведений на слагаемые, сопряжения векторов, использования линейной комбинации координат, ее деления на вектор, введения нулевого и мнимого нулевого векторных операторов, псевдовекторов и комбинированных векторов получить представленные выше разложения было бы невозможно.

Замечание. Несмотря на то, что в некоторых приведенных разложениях использован мнимый оператор $\{\nabla_0\}$, разложения сами по себе являются «чистыми» скалярами или векторами.

11. Некоторые физические интерпретации

Если в некоторой области среды (поля) объемом V определена функция мощности, сконцентрированной в этой области

$$P(x,y,z) = \iiint\limits_V p dv = \int\limits_{z_0}^{z} dz \int\limits_{y_0}^{y} dy \int\limits_{x_0}^{x} p(x,y,z)dx,$$

где $p(x,y,z)$ – объемная плотность мощности, то поверхностный градиент от этой функции представляет собой вектор Умова (вектор Умова-Пойнтинга для электромагнитного поля), т.е. вектор скорости движения энергии через единицу поверхности.

$$\boldsymbol{U} = grad_S P(x,y,z) = \nabla_S P(x,y,z).$$

Производная функции мощности $P(x,y,z)$ по некоторой поверхности с единичным вектором нормали $\boldsymbol{n}$ представляет собой количество энергии, проходящей через единицу площади этой поверхности в единицу времени

$$\frac{d_S^2 P}{d\sigma} = grad_S P \cdot \boldsymbol{n} = \nabla_S P \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}.$$

Пусть в некоторой области поля гравитации (или электростатического поля) для пробной массы (или электрического заряда) определена функция пространственного распределения сил $F(x,y,z)$, действующих на нее (на него) со стороны поля. Тогда поверхностная дивергенция векторного поля $F(x,y,z)$ представляет собой объемную плотность энергии гравитационного (или электростатического) поля в рассматриваемой точке.

$$div_S F = \nabla_S F = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta V}.$$

Если для излучающего диполя с электрическим моментом $\boldsymbol{p}_e$ известна функция пространственного распределения производной напряженности электрического поля по времени $d\boldsymbol{E}/dt(x,y,z) =$, то величина $A_1|\boldsymbol{p}_e|rot_e d\boldsymbol{E}/dt$ представляет собой вектор Умова-Пойнтинга в рассматриваемой точке

$$A|\boldsymbol{p}_e|rot_e \frac{d\boldsymbol{E}}{dt} = A|\boldsymbol{p}_e|\nabla_S \times \frac{d\boldsymbol{E}}{dt} = \boldsymbol{U}(x,y,z),$$

где A – безразмерный коэффициент.

Заключение

Основным результатом работы является «расщепление» векторного произведения на две части – ортоположительную и ортоотрицательную. Это позволяет, в частности, в случае векторного произведения вектора на себя самого из нулевой величины, которой является это произведение, «извлечь» две ненулевые. Применение этого приема к векторному произведению оператора Гамильтона (НАБЛА) на себя самого приводит к появлению векторного дифференциального смешанного оператора второго порядка, являющегося ключевым элементом при определении понятий поверхностного векторного анализа – поверхностного градиента, поверхностной производной по направлению, поверхностных дивергенции и ротора.

Введенные элементы поверхностного векторного анализа, в частности, расширяют арсенал средств для исследования физических полей, в том числе определения вектора Умова как поверхностного градиента от функции мощности, объемной плотности энергии силового поля как поверхностного дивергенции от функции пространственного распределения сил и т.д.

Список использованных источников

1. Попов, И.П. Скалярное и векторное дифференцирование векторов / И.П. Попов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2016. – №3 (34). – С. 19-27.

2. Попов, И.П. О некоторых операциях над векторами / И.П. Попов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2014. – №5 (24). – С. 55-61.

3. Попов, И.П. Интегрирование градиента в $\mathbb{R}^3$ / И.П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 44-46.

4. Попов, И.П. Об электромагнитной системе единиц / И.П. Попов // Вестник Челябинского государственного университета. Физика. – 2010. – Вып. 7. – №12(193). – С. 78-79.

5. Попов, И.П. О некоторых аспектах магнитоэлектрического взаимодействия / И.П. Попов // Вестник Челябинского государственного университета. Физика. – 2009. – Вып. 5. – №24(162). – С. 34-39.

6. Popov, I.P. Mathematical modeling of the formal analogy of electromagnetic field / I.P. Popov // Applied mathematics and control sciences. 2016, no. 4., pp. 36-60.

7. Попов, И.П. О пространственной конфигурации вихревого электрического поля / И.П. Попов // Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. – 2009. – Вып. 2. – №1(15). – С. 50, 51.
8. Попов, И.П. Дуально-инверсный аналог силы Ампера для магнитопровода с изменяющимся магнитным потоком, находящегося в электрическом поле / И.П. Попов // Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. – 2009. – Вып. 2. – №1(15). – С. 51, 52.
9. Попов, И.П. О некоторых изоморфизмах между электромагнитными и магнитоэлектрическими соотношениями / И.П. Попов // Вестник Курганского государственного университета. Технические науки. – 2010. – Вып. 5. – №1(17). – С. 94-96.
10. Попов, И.П. Роль псевдовекторов в математическом моделировании формального аналога электромагнитного поля / И.П. Попов // Вестник Псковского государственного университета. Естественные и физико-математические науки. – 2016. – Вып. 8. – С. 110-127.

Материал поступил в редакцию: 30.06.2017
Материал принят к публикации: 02.08.2017

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

SURFACE, ZERO AND ZERO IMAGINARY OPERATORS NABLA

Popov I.P.

Abstract. We introduce the notion of the terms of vector products, which are the first or ortopolozhitelnaya part and the second part or ortootritsatelnaya; further development of this concept is the notion of conjugate vectors, vector differential operator of the surface, the surface gradient, the derivative on the surface, the surface divergence and rotor. Treated surface functions, their surface differentiation and integration. The features of surface functions for which all terms are functions of at least two variables, in addition, surface features have mixed partial derivatives of the second order, with at least one of the mixed partial derivatives of second order of any term does not vanish . We prove a theorem on the restoration of surface features on its surface gradient. We introduce the notion of a linear combination of coordinates and its division by a vector zero and zero imaginary vector operators, pseudo and combined vectors. Is a series of expansions using these operations.

Keywords: vector, operator, surface coordinates, gradient, divergence, rotor, ort, positive, negative.

Referances

1. Popov I.P. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta*. Seriya 1: Matematika. Fizika, 2016, no. 3(34), pp. 19-27.
2. Popov, I.P. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstven-nogo universiteta*. Seriya 1: Matematika. Fizika. – 2014. – no. 5 (24). – S. 55-61.
3. Popov, I.P. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Informatika*, 2016, 2(33), pp. 44-46.
4. Popov, I.P. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika, 2010*, vol. 7. no. 12(193), pp. 78-79.
5. Popov, I.P. *Vestnik Chelya-binskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika, 2009*, vol. 5, no. 24(162), p. 34-39.
6. Popov, I.P. *Applied mathe-matics and control sciences*, 2016, no. 4, pp. 36-60.
7. Popov, I.P. *Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennyie nauki*, 2009, vol. 2, no. 1(15), pp. 50, 51.
8. Popov, I.P. *Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo uni-versiteta. Estestvennyie nauki*, 2009, vol. 2, no1(15), pp. 51, 52.
9. Popov, I.P. *Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta. Tehnicheskie nauki*, 2010, vol. 5, no. 1(17). pp. 94-96.
10. Popov, I.P. *Vestnik Pskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennyie i fiziko-matematicheskie nauki*, 2016, vol. 8, pp. 110-127.

ОБ АВТОРАХ:

Попов Игорь Павлович – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета. E-mail: ip.popow@yandex.ru

ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Попов, И.П. Поверхностный, нулевой и мнимый нулевой операторы НАБЛА / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2017. – Т.5. – №2. – С. 2-11.

Popov, I.P. (2017) Surface, zero and zero imaginary operators NABLA. *Software of systems in the industrial and social fields*, 5 (2): 2-11.