

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ПОТОКОВ ПРИ РАЗЛИВКЕ СТАЛИ В «ЖИДКИЙ» КРИСТАЛЛИЗАТОР

Ячиков И.М., Матвеев С.В., Картавцев С.В.

**Аннотация.** Для расчета гидродинамических характеристик при разливке стали в «жидкий» кристаллизатор на первоначальном этапе произведено решение дифференциального уравнения пограничного слоя, в результате которого получено решение на границе раздела двух параллельных течений. Выполнен расчет параметров ламинарного пограничного слоя на границе раздела двух несмешивающихся между собой жидкостей, при движении в спутном потоке. Рассчитана размерная толщина пограничного слоя при разливке стали в «жидкий» кристаллизатор. Составлена математическая модель распределения профиля скоростей в ламинарном слое на границе раздела двух потоков. Приведены оценки размерной толщины пограничного слоя в зависимости от соотношения скоростей движения стали и теплоносителя, установлено, что в зависимости от соотношения скоростей они могут находиться в довольно широком диапазоне значений: при  $\lambda_1 \approx 1$  и,  $x \approx x_{кр}$  размерная толщина пограничного слоя лежит в пределах  $\delta_1 = 0,3 \div 30$  мм.

**Ключевые слова:** разливка стали в жидкие слои, «жидкий» кристаллизатор, ламинарный пограничный слой, дифференциальное уравнение пограничного слоя, толщина пограничного слоя, движение двух несмешивающихся жидкостей.

### Введение

По сообщению всемирной ассоциации стали World Steel Association в 2016 г. выплавлено 1,62 млрд тонн жидкой стали [1]. При этом около 98% всей стали используется для изготовления конструкционных материалов, получаемых путем разливки в машинах непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). В процессе разливки происходит формообразование готовых слитков, часто близких по форме к готовым изделиям. При этом с каждой тонны жидкой стали отводится около 1400 МДж тепловой энергии при ее кристаллизации и охлаждении с 1600 °С до температуры окружающей среды. Значительное количество тепла практически не используется и сбрасывается в окружающую среду. Однако есть теоретические работы по использованию тепла разливаемой стали в МНЛЗ для самых различных целей. Это теплоснабжение, генерация пара и электроэнергии [2-4]. По представленным в этих работах данным для энергетических нужд возможно утилизировать до 9-40 % теплоты разливаемой стали. Однако наибольший эффект дает использование теплоты при разливке стали в жидкие слои высокотемпературных теплоносителей [5, 6] для формирования заготовок, близких к конечным размерам без применения твердотельного кристаллизатора. Такая разливка имеет высокую эффективность теплоотвода за счет контактного теплообмена и исключает стадию охлаждения толстых слябов на складе и нагревания их в методических печах.

Интерес к разливке стали на жидкие слои расплавленных материалов отмечается с 30-х

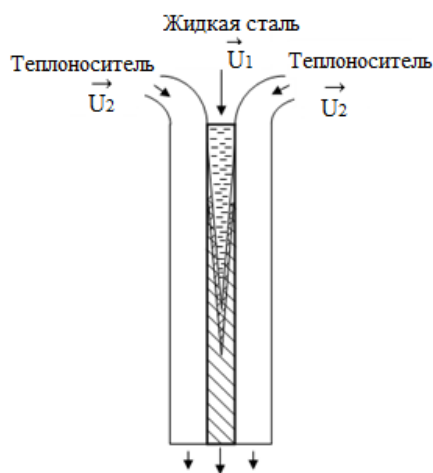


Рис. 1. Схема разливки стали в жидкий кристаллизатор

лет 20 века [7-14]. Причем в ряде работ ставились технологические задачи формирования разливаемых заготовок без оценки теплообменных характеристик. Предлагалось жидкую сталь с температурой порядка 1600 °С подавать в слои движущегося теплоносителя, температура кипения которого превышает температуру разливаемой стали и температура затвердевания ниже температуры готового стального изделия на выходе из «жидкого» кристаллизатора. В процессе движения в спутном потоке под действием гравитационных сил сталь охлаждается, затвердевает и полученная заготовка охлаждается до температуры горячей прокатки порядка 1250 °С для дальнейшей технологической доработки в чистовых клетях (рис. 1). В процессе теплообмена теплоноситель нагревается до температур, обоснованных его использованием в энергетических целях. При спут-

ном движении теплоносителей и разливаемой стали стараются сохранить ламинарное течение слоев, при этом значения относительной скорости принадлежат широким интервалам

значений. На границах взаимодействия жидкостей образуются гидродинамические пограничные слои, которые вносят весомый вклад в процессы теплообмена при ламинарном движении жидких металлов. Поэтому вызывает большой интерес поведение этих слоев в зависимости от соотношения скоростей их спутного движения и теплофизических свойств.

Целью данной работы является оценка величины гидродинамического пограничного слоя при движении двух потоков жидких материалов при разных соотношениях скорости их движения.

### Математическая модель распределения скоростей в ламинарном слое на границе раздела двух потоков

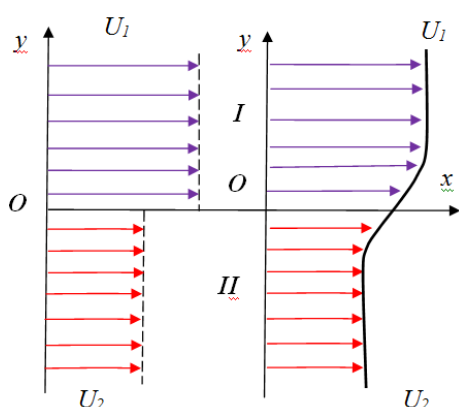


Рис. 2. Схема распределение скоростей в ламинарном слое на границе раздела двух потоков

При разработке математической модели выделены следующие допущения и ограничения: движение металлов в спутном потоке ламинарное и плоское, теплофизические свойства разливаемого материала и теплоносителя одинаковы.

Рассмотрим ламинарный слой на границе раздела двух параллельных течений с различными скоростями. Два первоначально разделенных и невозмущенных параллельных течения I и II, имеющих скорости  $U_1$  и  $U_2$ , начинают взаимодействовать вследствие вязкостного трения (рис. 2). В результате возникает распределение скоростей. Можно принять, что переход от скорости  $U_1$  к скорости  $U_2$  происходит в тонкой зоне перемешивания и первоначальная поперечная составляющая скорости  $v$  везде мала по сравнению с продольной составляющей  $u$  ( $v \ll u$ ).

К областям I и II можно применить дифференциальное уравнение пограничного слоя [15]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где  $u$  и  $v$  – проекции скорости на ось  $Ox$  и  $Oy$  соответственно;  $\vartheta$  – кинематическая вязкость жидкости;  $U(x)$  – известная функция потенциального течения, определяемая решением уравнения распределения давления

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

где  $p$  – давление, которое может быть определено при решении уравнения Бернулли,  $\rho$  – плотность,  $\text{кг/м}^3$ .

Если жидкости I и II имеют одинаковые свойства (плотность и вязкость), то граничными условиями являются:

$$u|_{y=+\infty} = U_1; u|_{y=-\infty} = U_2; v|_{y=0} = 0. \quad (3)$$

Для интегрирования уравнения неразрывности (2) введем функцию тока  $\psi(x, y)$  следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}; \quad (4)$$

$$v = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}, \quad (5)$$

тогда получим результирующее дифференциальное уравнение для функции тока

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \vartheta \frac{\partial^3 \psi(x, y)}{\partial y^3}. \quad (6)$$

Введем безразмерную координату по оси ординат  $\eta = y/\delta$ , где  $\delta = \sqrt{vx/U_1}$  – оценка толщины пограничного слоя, тогда получим

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_1}{vx}}. \quad (7)$$

Выберем функцию тока в виде

$$\psi = f(\eta) \cdot \sqrt{U_1 \cdot v \cdot x}. \quad (8)$$

Исходя из (8) и (4) получим выражение для продольной составляющей скорости

$$u = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = U_1 \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} = U_1 \cdot f'(\eta). \quad (9)$$

Аналогично находим поперечную составляющую скорости из (8) и (5) как производную произведения

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = - \left[ \frac{\partial f(\eta)}{\partial x} \cdot \sqrt{U_1 \cdot v \cdot x} + f(\eta) \cdot \frac{\partial(\sqrt{U_1 \cdot v \cdot x})}{\partial x} \right] = \\ &= - \left[ -\sqrt{U_1 \cdot v \cdot x} \cdot \left[ f'(\eta) \cdot \frac{\eta}{2x} \right] + f(\eta) \cdot \frac{\partial(\sqrt{U_1 \cdot v \cdot x})}{\partial x} \right]; \\ v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v \cdot U_1}{x}} (\eta \cdot f'(\eta) - f(\eta)). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя выражения (9) и (10) в уравнение (1) и учитывая, что

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x} \text{ и } \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_1}{v \cdot x}},$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2 \cdot f''' + f \cdot f'' = 0. \quad (11)$$

Граничные условия (3) с учетом (9) и (10) принимают вид

$$f'(+\infty) = 1; f'(-\infty) = \frac{U_2}{U_1}; f(0) = 0. \quad (12)$$

Краевая задача (11)-(12) не допускает замкнутого решения. Отсюда представляет интерес обсуждение приближенных решений, например асимптотического поведения уравнения пограничного слоя (11) [16, 17]. Если  $\eta \rightarrow \infty$ , то  $f'(\eta) \rightarrow 1$  и  $f(\eta) \rightarrow \eta$ . Поэтому для больших положительных значений  $\eta$  в первом приближении уравнение (11) можно записать в следующем виде [18, 19]:

$$2 \cdot f''' + \eta \cdot f'' \cong 0.$$

Для уравнения (11) существует решение  $1 - f'(\eta) = k_1 \cdot \operatorname{erfc}(\eta/2)$ , которое можно записать в виде

$$u_1 = \frac{u}{U_1} = 1 - k_1 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2}\right). \quad (13)$$

Аналогично при больших отрицательных значениях  $\eta$

$$f'(\eta) - \frac{U_2}{U_1} = -k_2 \cdot \operatorname{erfc} \left( -\frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{U_2}{U_1}} \right) \text{ или } u_2 = \lambda - k_2 \cdot \operatorname{erfc} \left( -\frac{\eta}{2} \sqrt{\lambda} \right). \quad (14)$$

Воспользуемся условием непрерывности скорости и касательного напряжения на границе раздела двух потоков

$$f'_1(0) = f'_2(0), \quad (15)$$

$$f''_1(0) = f''_2(0). \quad (16)$$

Используя первое условие  $1 - k_1 = \lambda - k_2$ , получим

$$k_2 = k_1 + \lambda - 1. \quad (17)$$

С учетом второго условия

$$f''_1(\eta) = k_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{\eta^2}{4} \right) \text{ и } f''_2(\eta) = -k_2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\lambda \frac{\eta^2}{4} \right)$$

можно записать

$$k_1 = -\sqrt{\lambda} k_2. \quad (18)$$

Решая (17) и (18), получим

$$k_2 = \frac{\lambda - 1}{1 + \sqrt{\lambda}} \text{ и } k_1 = 1 - k_2 = \frac{\sqrt{\lambda}(1 - \lambda)}{1 + \sqrt{\lambda}}.$$

Таким образом, получили решение пограничного слоя на границе раздела двух параллельных течений

$$u_1 = \frac{u}{U_1} = 1 - \frac{\sqrt{\lambda}(1 - \lambda)}{1 + \sqrt{\lambda}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{2} \right), \quad (19)$$

$$u_2 = \lambda - \frac{\lambda - 1}{1 + \sqrt{\lambda}} \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\eta}{2} \right). \quad (20)$$

### Результаты моделирования движения жидкости на границе раздела двух потоков

С помощью выражений (19)-(20) получено распределение скоростей при взаимном движении двух несмешивающихся жидкостей, показанное на рис. 3. Данные зависимости хорошо согласуются с расчетными данными, приведенными в работах [15-17].

За толщину пограничного слоя чаще всего принимают толщину вытеснения  $\delta_1$  – расстояние, на которое потенциальное течение вытесняется из-за уменьшения скорости в пограничном слое

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{v \cdot x}{U}} \cdot \int_0^{\infty} (1 - f'(\eta)) d\eta \approx 1,7208 \cdot \sqrt{\frac{v \cdot x}{U}}.$$

В частности, для ламинарного течения вдоль плоской пластины [1]

$$\delta_1 = \delta^* \delta_0 \approx 1,7208 \cdot \sqrt{\frac{v \cdot x}{U}}.$$

Для ламинарного слоя на границе раздела двух параллельных течений с различными скоростями расстояния складываем по модулю

$$\delta^* = \left| \int_{-\infty}^0 (\lambda - u_2(\eta)) d\eta \right| + \left| \int_0^{\infty} (1 - u_1(\eta)) d\eta \right| \quad (21)$$

или

$$\delta^* = \left| \frac{\lambda - 1}{1 + \sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^0 \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\eta}{2} \right) d\eta \right| + \left| \frac{\sqrt{\lambda}(1 - \lambda)}{1 + \sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{2} \right) d\eta \right|. \quad (21)$$

С учетом того, что

$$\int_0^{\infty} \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{2} \right) d\eta \approx 1,1128 \text{ и } \int_{-\infty}^0 \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\eta}{2} \right) d\eta \approx \frac{1,1128}{\sqrt{\lambda}}$$

приближенное вычисление интегралов позволяет получить выражение

$$\delta^* = 1,128 \frac{|\lambda^2 - 1|}{\sqrt{\lambda}(1 + \sqrt{\lambda})}. \quad (22)$$

Зависимость толщины пограничного слоя от соотношения  $\lambda$  показана на рис. 4.

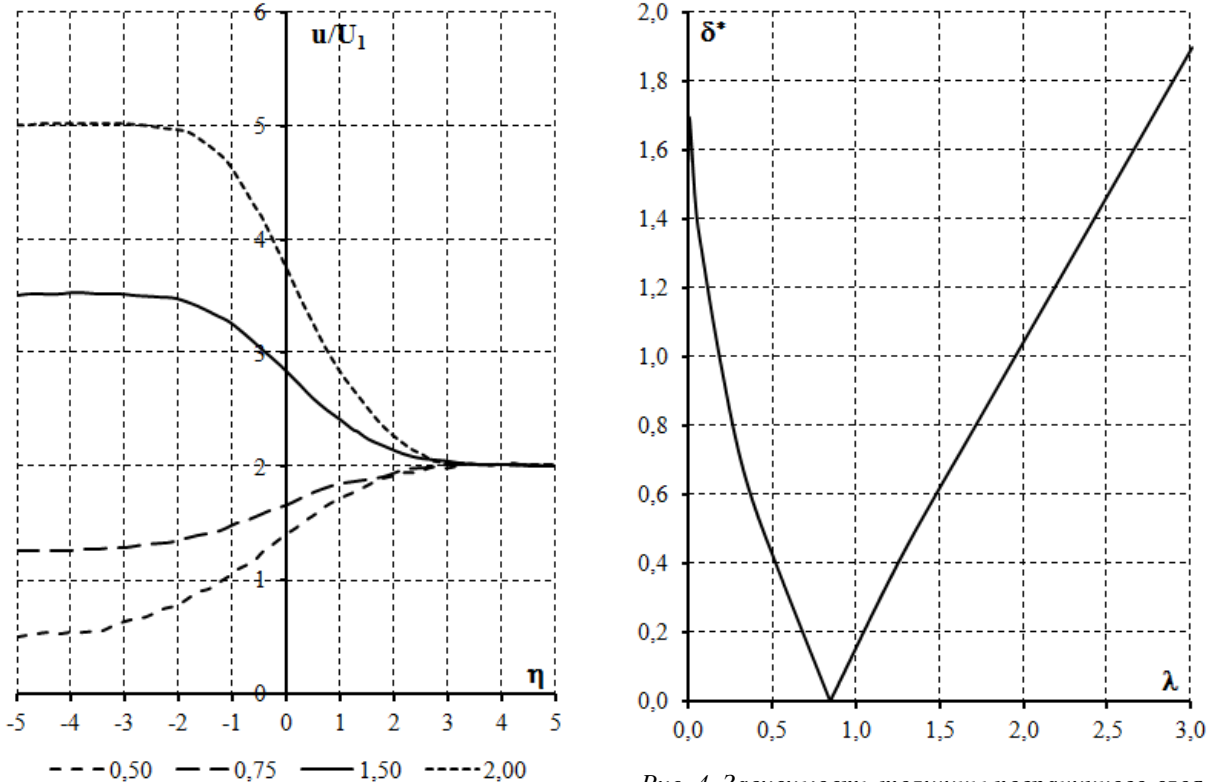


Рис. 3. Распределение профиля скоростей при движении двух несмешивающихся жидкостей при разных  $\lambda$

Рис. 4. Зависимость толщины пограничного слоя от соотношения скоростей  $\lambda$

Размерная толщина пограничного слоя на границе двух потоков, м

$$\delta_1 \approx 1,128 \sqrt{\frac{v \cdot x}{U_1}} \cdot \frac{|\lambda^2 - 1|}{\sqrt{\lambda}(1 + \sqrt{\lambda})}. \quad (23)$$

Если ввести обозначение

$$\lambda_1 = \frac{|\lambda^2 - 1|}{\sqrt{\lambda}(1 + \sqrt{\lambda})},$$

то получим

$$\delta_1 \approx \frac{1,128 \cdot x}{\sqrt{Re_x}} \cdot \lambda_1, \quad Re_x = \frac{U_1 \cdot x}{v}. \quad (24)$$

Известно, что переход от ламинарного течения в турбулентное происходит при  $Re_x = Re_{кр} \approx 10^5$  [15]. Для жидкой стали, имеющей кинематическую вязкость

$\vartheta = 0,86 \text{ мм}^2/\text{с}$  при относительном ее движении со скоростью  $|U_1 - U_2| = 0,01 \div 1 \text{ м/с}$ , критическая координата перехода ламинарного течения в турбулентное лежит в пределах  $x_{\text{кр}} = 0,086 \div 8,6 \text{ м}$ . При этом можно оценить размерную толщину пограничного слоя, которая находится в диапазоне  $\delta_1 = 0,3 \div 30 \text{ мм}$  при  $\lambda_1 \approx 1$  и  $\lambda_1 \approx 1$ ,  $x \approx x_{\text{кр}}$ .

### Заключение

Таким образом, при спутном движении двух несмешивающихся жидких металлов с одинаковыми свойствами:

- предложено решение пограничного слоя на границе раздела двух параллельных течений (19)-(20) и показано распределение профиля скоростей в пограничном слое при различном относительном соотношении скоростей металлов;
- получена зависимость (23) для оценки толщины пограничного слоя (толщины вытеснения);
- приведены оценки размерной толщины пограничного слоя в зависимости от соотношения скоростей движения стали и теплоносителя, установлено, что в зависимости от соотношения скоростей они могут находиться в довольно широком диапазоне значений.

### Список использованных источников

1. World Steel Association [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.worldsteel.org/steel-by-topic/statistics/monthly-crude-steel-and-iron-production.html>. – Загл. с экрана.
2. Ковытин, А.А. О проблемах и перспективах утилизации теплоты, выделяющейся при разливке стали / А.А. Ковытин, Ю.А. Калягин // Промышленная энергетика. – 2007. – № 8. – С. 36-39.
3. Повышение энергетической эффективности процесса непрерывной разливки стали / Х.Н. Аловадинова, Ю.К. Демин, С.В. Матвеев, С.В. Картавцев. // Промышленная энергетика. – 2015. – №2. – С. 8-11.
4. Лукин, С.В. Использование теплоты охлаждения стали, разливаемой на машинах непрерывного литья заготовок, в системе теплоснабжения предприятия / С.В. Лукин, Д.Н. Поселужный, А.Н. Кибардин // Промышленная энергетика. – 2013. – № 5. – С.7-9.
5. Строгонов, К.В. Жидкая сталь: использование теплоты и скоростная разливка: монография / К.В. Строгонов, С.В. Картавцев. – Магнитогорск, 2006. – 147 с.
6. Использование тепловых потерь в электросталеплавильном комплексе для выработки электроэнергии / С.В. Матвеев, Р.В. Захаров, Х.Н. Аловадинова и др. // Электротехнические системы и комплексы. – 2013. – № 21. – С. 298-301.
7. Formation of metal shapes. Charles D. Coxe, Bridgeport, Conn., assignor to Remington Arms Company, Ins., a corporation of Delaware: A.c. US 2298348. May 11, 1940.
8. Method of forming structural shapes from molten material by stream casting: A.c. US 3430680. Mar 4, 1969.
9. Method of producing bimetallic strips: A.c. US 2022571 / John V.O. Palm, George S. Salzman, 1933.
10. Formation of films and filament directly from polymer intermediates. Eugene Edward Magat and Donald Ritter Strachan, Wilmington, Del., assignors to E.I. du Pont de Nemours & Company, Wilmington. Del., a corporation of Delaware: A.c. US 2708617. May 17, 1955.
11. Method for the casting of sheets of a fusible material: A.c. US 2754559 / Howard A. Fromson, Weston, Conn; July 17, 1956.
12. Centrifugal casting: a.c. US 1831310 / Lewis B. Lindemuth, of New York, N. Y. Mar 30, 1927.
13. Способ производства плоских изделий: а.с. RU 2239515 / С.В. Картавцев, К.В. Строгонов; 10.11.2004.
14. Способ непрерывной разливки металлов: а.с. RU 782951 / А.М. Бигеев, А.Ф. Миляев, Ю.П.Ширшов и др.; 30.11.1980.
15. Шлихтинг, Г.М. Теория пограничного слоя / Г. М. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
16. Lock, R. C. The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams / R. C. Lock // J Mechanics App. Math. – 1951. – № 4 (1). – Pp. 42-63.
17. Potter, O.E. Laminar boundary layers at the interface of co-current parallel streams / O.E. Potter // J Mechanics App. Math. – 1957. – № 10 (3). Pp. 302-311.
18. Lessen, M. On the stability of the free laminar boundary layer between parallel streams / M. Lessen. – Washington: Lewis Flight Propulsion Laboratory Cleveland, 1949.
19. Lessen, M. On stability of free laminar boundary layer between parallel streams / M. Lessen. // Report. – Texas: University of North Texas Libraries, Digital Library, digital.library.unt.edu, 1950.

Материал поступил в редакцию: 24.06.2017

Материал принят к публикации: 11.08.2017



INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

**IDENTIFICATION OF THE PARAMETERS OF THE LAMINAR BOUNDARY LAYER ON THE BORDER OF THE TWO STREAMS DURING STEEL CASTING IN A "LIQUID" CRYSTALLIZER**

*Jachikov I.M., Matveev S.V., Kartavcev S.V.*

**Abstract.** In order to calculate the hydrodynamic characteristics during the steel casting into the "liquid" crystallizer, the differential equation of the boundary layer was solved at the initial stage, as a result of which a solution was obtained at the interface of two parallel flows. The parameters of the laminar boundary layer are calculated at the interface between two immiscible liquids, when moving in a concurrent flow. The dimensional thickness of the boundary layer is calculated when steel casting in a "liquid" crystallizer. A mathematical model for the distribution of the velocity profile in a laminar layer at the interface of two flows is composed. Estimates of the dimensional thickness of the boundary layer as a function of the ratio of the velocities of steel and coolant motion are established, it is established that, depending on the ratio of velocities, they can be in a rather wide range of values: at  $\lambda_1 \approx 1$  and  $\chi \approx \chi_{кр}$  the dimensional thickness of the boundary layer is within  $\delta_1 = 0,3 \div 30$  mm.

**Keywords:** casting of steel into liquid layers, "liquid" crystallizer, laminar boundary layer, boundary layer differential equation, boundary layer thickness, motion of two immiscible liquids.

**References**

1. World Steel – URL: <https://www.worldsteel.org/steel-by-topic/statistics/monthly-crude-steel-and-iron-production.html>.
2. Kovyitin A.A., Kalyagin Yu.A. *Promyshlennaya energetika*, 2007, no. 8, pp. 36-39. (In Russ.)
3. Alovadinova H.N., Demin Yu.K., Matveev S.V., Kartavcev S.V. *Promyshlennaya energetika*, 2015, no. 2, pp. 8-11. (In Russ.)
4. Lukin S.V., Poselyuzhnyiy D.N., Kibardin A.N. *Promyshlennaya energetika*, 2013, no. 5, pp.7-9. (In Russ.)
5. Strogonov K.V., Kartavcev S.V. *Zhidkaya stal: ispolzovanie teploty i skorostnaya razlivka: monografiya*. Magnitogorsk, 2006, 147 p.
6. Matveev S.V., Zaharov R.V., Alovadinova H.N. i dr. *Elektrotehnicheskie sistemy i kompleksi* [Electrotechnical Systems and Complexes], 2013, no. 21, p. 298-301. (In Russ.)
7. Formation of metal shapes. Charles D. Coxe, Bridgeport, Conn., assignor to Remington Arms Company, Ins., a corporation of Delaware: A.s. US 2298348. May 11, 1940.
8. Method of forming structural shapes from molten material by stream casting: A.s. US 3430680. Mar 4, 1969.
9. Method of producing bimetallic strips: A.s. US 2022571. / John V.O. Palm, George S. Salzman, 1933.
10. Formation of films and filament directly from polymer intermediates. Eugene Edward Magat and Donald Ritter Strachan, Wilmington, Del., assignors to E.I. du Pont de Nemours & Company, Wilmington. Del., a corporation of Delaware: A.s. US 2708617. May 17, 1955.
11. Method for the casting of sheets of a fusible material: A.s. US 2754559. / Howard A. Fromson, Weston, Conn; July 17, 1956.
12. Centrifugal casting: A.s. US 1831310. / Lewis B. Lindemuth, of New York, N. Y. Mar 30, 1927.
13. Sposob proizvodstva ploskih izdeliy: A.s. RU 2239515 / S.V. Kartavcev, K.V. Strogonov; 10.11.2004. (In Russ.)
14. Sposob nepreryivnoy razlivki metallov: A. s. RU 782951 / A.M. Bigeev, A.F. Milyaev, Yu.P. Shirshov i dr.; 30.11.1980. (In Russ.)
15. Shlihting G.M. *Teoriya pogramichnogo sloya*. Moscow: Nauka, 1974, 712 p. (In Russ.)
16. Lock R. C. *J Mechanics App. Math*, 1951, no. 4 (1), pp. 42-63.
17. Potter O.E. *J Mechanics App. Math*, 1957, no. 10 (3), pp. 302-311.
18. Lessen M. *On the stability of the free laminar boundary layer between parallel streams*. Washington: Lewis Flight Propulsion Laboratory Cleveland, 1949.
19. Lessen M. *On stability of free laminar boundary layer between parallel streams*. Texas: University of North Texas Libraries, Digital Library, digital.library.unt.edu, 1950.

**ОБ АВТОРАХ:**

**Ячиков Игорь Михайлович** – д-р техн. наук, проф., проф. кафедры вычислительной техники и программирования ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». E-mail: jachikov@mail.ru.

**Матвеев Сергей Валерьевич** – инженер, ассистент кафедры теплотехнических и энергетических систем ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». E-mail: matveev\_s\_v@inbox.ru.

**Картавцев Сергей Владимирович** – д-р техн. наук, доцент, проф. кафедры теплотехнических и энергетических систем ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». E-mail: kartavzw@mail.ru.

**ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:**

Ячиков, И.М. Идентификация параметров ламинарного пограничного слоя на границе раздела двух потоков при разливке стали в «жидкий» кристаллизатор / И.М. Ячиков, С.В. Матвеев, С.В. Картавцев // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2017. – Т.5. – №2. – С. 12-18.

Jachikov, I.M., Matveev, S.V. and Kartavcev S.V. (2017) Identification of the parameters of the laminar boundary layer on the border of the two streams during steel casting in a "liquid" crystallizer. *Software of systems in the industrial and social fields*, 5 (2): 12-18.