МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

УДК 51-72

СКАЛЯРНАЯ И ВЕКТОРНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

Попов И.П.

Аннотация. Вводятся в рассмотрение скалярная и векторная производные вектора по другому вектору, которые могут иметь приложение к решению задач механики. Доказывается теорема о представлении скалярной производной в виде комбинации частных производных. Отмечено, что при решении ряда задач механики для упрощения вычислений систему координат выбирают таким образом, чтобы, по крайней мере, направление некоторых векторов совпадало с одной из координатных осей. Это порождает необходимость доказательства двух теорем для двухмерного и одномерного случаев. Доказывается теорема о представлении векторной производной в виде комбинации частных производных. Доказываются две аналогичные теоремы для двухмерного и одномерного случаев. В качестве характерных частных случаев рассматриваются скалярная и векторная производные по радиус-вектору, порождающие соответствующие формализмы, связывающие эти производные с оператором набла. Приводятся примеры приложения полученных результатов к задачам механики.

Ключевые слова: векторное поле, скалярная производная, векторная производная, вектор Умова, ускорение, скорость.

Введение

Работа посвящена рассмотрению операций дифференцирования на пространстве векторных полей и гладких функций в R^3. В приложениях достаточно широко используется производная скалярной функции по вектору. В какой-то мере подобно ей определяется производная вектора по другому вектору

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{d\boldsymbol{b}} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} b_x + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} b_y + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z} b_z.$$

Вместе с тем, формально интерпретируя производную как отношение дифференциалов, можно ввести в рассмотрение *скалярную* и *векторную* производные вектора по другому вектору, которые могут иметь приложение к решению задач механики [1-4].

Деление векторов

Определение 1. Частное $a/\boldsymbol{b}$ от деления скаляра a на вектор $\boldsymbol{b}$ есть вектор

$$\boldsymbol{c} = \frac{a}{\boldsymbol{b}} = \frac{a}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}} = \frac{a\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}} = \frac{a}{b^2} \boldsymbol{b}.$$

Обратно,

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \frac{a}{b^2} \boldsymbol{b} = a.$$

В частности,

$$\frac{1}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b}}{b^2}.$$

Определение 2. Частное $\boldsymbol{e}/\boldsymbol{b}$ от скалярного деления вектора $\boldsymbol{e}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ есть скаляр

$$p = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{e} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{e} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{b^2} = \frac{\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{b}}{b^2} = \frac{c}{b^2} = \frac{e}{b} cos\theta,$$

где θ – угол между векторами $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{b}$. При этом

$$\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}} = cos^2\theta.$$

Определение 3. Частное $\boldsymbol{e} \div \boldsymbol{b}$ от векторного деления вектора $\boldsymbol{e}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ есть вектор

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e} \div \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} \times \frac{1}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{e} \times \frac{\boldsymbol{b}}{b^2} = \frac{\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{b}}{b^2} = \frac{\boldsymbol{d}}{b^2} = \frac{e}{b} \cdot \frac{\boldsymbol{d}}{d} \cdot sin\theta.$$

При этом

$$(\boldsymbol{e} \div \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} \div \boldsymbol{e}) = -sin^2\theta,$$

$$\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}} - (\boldsymbol{e} \div \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} \div \boldsymbol{e}) = 1,$$

$$p^2 + \boldsymbol{q}^2 = \frac{\boldsymbol{e}^2}{\boldsymbol{b}^2}.$$

Теорема 1. Если известны частные от скалярного p и векторного $\boldsymbol{q}$ деления двух векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{b}$, а также делитель $\boldsymbol{b}$, то делимое определяется как

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b}p + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{q}.$$

Доказательство:

$$\boldsymbol{b}p + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{q} = \frac{1}{b^2}[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{b})] = \frac{1}{b^2}[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{e}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e})] = \boldsymbol{e}. \blacksquare$$

Теорема 2. Если известны частные от скалярного p и векторного $\boldsymbol{q}$ деления двух векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{b}$, а также делимое **e**, то делитель определяется, как

$$\boldsymbol{b} = \frac{p\boldsymbol{e} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{e}}{p^2 + \boldsymbol{q}^2}.$$

Доказательство:

$$\frac{p\boldsymbol{e} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{e}}{p^2 + \boldsymbol{q}^2} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^2}{e^2}[(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{e}] = \frac{1}{e^2}[(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}) - \boldsymbol{e}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{b})] = \boldsymbol{b}. \blacksquare$$

Скалярная производная вектора по другому вектору

Определение 4. Операция

$$d\boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{d\boldsymbol{b}}$$

называется скалярной производной векторного поля $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ по векторному полю $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$.

Теорема 3. Имеет место формула

$$d\boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{d\boldsymbol{b}} = \frac{da_x}{db_x} + \frac{da_y}{db_y} + \frac{da_z}{db_z}. \quad (1)$$

Доказательство:

$$d\boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{d\boldsymbol{b}} = d\left(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\right) \cdot \frac{1}{d\left(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}\right)} =$$

$$= \left(da_x\boldsymbol{i} + da_y\boldsymbol{j} + da_z\boldsymbol{k}\right) \cdot \frac{1}{db_x\boldsymbol{i} + db_y\boldsymbol{j} + db_z\boldsymbol{k}} =$$

$$= da_x\boldsymbol{i} \cdot \frac{1}{db_x\boldsymbol{i} + db_y\boldsymbol{j} + db_z\boldsymbol{k}} \cdot \frac{db_x\boldsymbol{i}}{db_x\boldsymbol{i}} + da_y\boldsymbol{j} \cdot \frac{1}{db_x\boldsymbol{i} + db_y\boldsymbol{j} + db_z\boldsymbol{k}} \cdot \frac{db_y\boldsymbol{j}}{db_y\boldsymbol{j}} +$$

$$+ da_z\boldsymbol{k} \cdot \frac{1}{db_x\boldsymbol{i} + db_y\boldsymbol{j} + db_z\boldsymbol{k}} \cdot \frac{db_z\boldsymbol{k}}{db_z\boldsymbol{k}} = da_x\boldsymbol{i} \cdot \frac{db_x\boldsymbol{i}}{\left(db_x\boldsymbol{i} + db_y\boldsymbol{j} + db_z\boldsymbol{k}\right) \cdot db_x\boldsymbol{i}} +$$

$$+ da_y\boldsymbol{j} \cdot \frac{db_y\boldsymbol{j}}{\left(db_x\boldsymbol{i} + db_y\boldsymbol{j} + db_z\boldsymbol{k}\right) \cdot db_y\boldsymbol{j}} + da_z\boldsymbol{k} \cdot \frac{db_z\boldsymbol{k}}{\left(db_x\boldsymbol{i} + db_y\boldsymbol{j} + db_z\boldsymbol{k}\right) \cdot db_z\boldsymbol{k}} =$$

$$= \frac{da_x\boldsymbol{i} \cdot db_x\boldsymbol{i}}{db_x^2} + \frac{da_y\boldsymbol{j} \cdot db_y\boldsymbol{j}}{db_y^2} + \frac{da_z\boldsymbol{k} \cdot db_z\boldsymbol{k}}{db_z^2} =$$

$$= \frac{da_x db_x}{db_x^2} + \frac{da_y db_y}{db_y^2} + \frac{da_z db_z}{db_z^2} = \frac{da_x}{db_x} + \frac{da_y}{db_y} + \frac{da_z}{db_z}. \blacksquare$$

Представляет интерес частный случай, когда берется скалярная производная по радиус-вектору $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

$$d\boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{d\boldsymbol{r}} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = div\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a}.$$

Следствие. Имеет место формализм

$$d \cdot \frac{1}{d\boldsymbol{r}} = \nabla.$$

Замечание. При решении ряда задач механики для упрощения вычислений систему координат выбирают таким образом, чтобы, по крайней мере, направление некоторых векторов совпадало с одной из координатных осей [5-6]. Если это касается вектора, по которому предполагается выполнить дифференцирование, то в таких случаях формула (1) использоваться не может, поскольку некоторые дифференциалы этого вектора равны нулю [7-8].

Это обстоятельство обусловливает следующие две теоремы.

Теорема 4. Имеет место формула

$$d\boldsymbol{a}\cdot\frac{1}{d(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)}=\frac{da_1}{db_1}+\frac{da_2}{db_2},$$

где $\boldsymbol{e}$ – орты.

Доказательство:

$$d\boldsymbol{a}\cdot\frac{1}{d(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)}=d(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\frac{1}{d(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)}=$$

$$=(da_1\boldsymbol{e}_1+da_2\boldsymbol{e}_2+da_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2}=$$

$$=\frac{da_1\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2}\cdot\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1}+\frac{da_2\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2}\cdot\frac{db_2\boldsymbol{e}_2}{db_2\boldsymbol{e}_2}+\frac{da_3\boldsymbol{e}_3}{db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2}\cdot\frac{db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2}{db_1\boldsymbol{e}_{1+}db_2\boldsymbol{e}_2}=$$

$$=\frac{da_1\boldsymbol{e}_1\cdot db_1\boldsymbol{e}_1}{(db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2)\cdot db_1\boldsymbol{e}_1}+\frac{da_2\boldsymbol{e}_1\cdot db_2\boldsymbol{e}_2}{(db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2)\cdot db_2\boldsymbol{e}_2}+\frac{da_3\boldsymbol{e}_3\cdot(db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2)}{(db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2)^2}=$$

$$=\frac{da_1db_1}{db_1^2}+\frac{da_2db_2}{db_2^2}=\frac{da_1}{db_1}+\frac{da_2}{db_2}.\blacksquare$$

Аналогично доказывается

Теорема 5. Имеет место формула

$$d\boldsymbol{a}\cdot\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1}=\frac{da_1}{db_1}.$$

Пример 1. Тело массой m движется со скоростью

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}\frac{1}{3}v+\boldsymbol{j}\frac{\sqrt{3}}{3}v+\boldsymbol{k}\frac{\sqrt{5}}{3}v.$$

В соответствии с [9, 10] интегральный (в смысле объемного интегрирования) вектор Умова в этом случае равен

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}\frac{1}{162}mv^3+\boldsymbol{j}\frac{3\sqrt{3}}{162}mv^3+\boldsymbol{k}\frac{5\sqrt{5}}{162}mv^3.$$

При этом

$$d\boldsymbol{u}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{v}}=\frac{du_x}{dv_x}+\frac{du_y}{dv_y}+\frac{du_z}{dv_z}=\frac{1}{18}mv^2+\frac{3}{18}mv^2+\frac{5}{18}mv^2=\frac{1}{2}mv^2,$$

что является кинетической энергией.

Векторная производная вектора по другому вектору

Определение 5. Операция

$$d\boldsymbol{a}\times\frac{1}{d\boldsymbol{b}}$$

называется векторной производной векторного поля $\boldsymbol{a}$ по векторному полю $\boldsymbol{b}$.

Теорема 6. Имеет место формула

$$d\boldsymbol{a}\times\frac{1}{d\boldsymbol{b}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{da_y}{db_z}-\frac{da_z}{db_y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{da_z}{db_x}-\frac{da_x}{db_z}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{da_x}{db_y}-\frac{da_y}{db_x}\right)\boldsymbol{k}\right].\qquad(2)$$

Доказательство:

$$d\boldsymbol{a}\times\frac{1}{d\boldsymbol{b}}=d\left(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}\ +\ a_z\boldsymbol{k}\ \right)\times\frac{1}{d\left(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}\ +\ b_z\boldsymbol{k}\right)}=$$

$$=\left(da_x\boldsymbol{i}+da_y\boldsymbol{j}\ +da_z\boldsymbol{k}\ \right)\times\frac{1}{db_x\boldsymbol{i}+db_y\boldsymbol{j}\ +db_z\boldsymbol{k}}=$$

$$= da_x\boldsymbol{i}\times\frac{1}{db_x\boldsymbol{i}+db_y\boldsymbol{j}\ +db_z\boldsymbol{k}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{db_y\boldsymbol{j}}{db_y\boldsymbol{j}}+\frac{db_z\boldsymbol{k}}{db_z\boldsymbol{k}}\right)+$$
$$= da_y\boldsymbol{j}\times\frac{1}{db_x\boldsymbol{i}+db_y\boldsymbol{j}\ +db_z\boldsymbol{k}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{db_x\boldsymbol{i}}{db_x\boldsymbol{i}}+\frac{db_z\boldsymbol{k}}{db_z\boldsymbol{k}}\right)+$$
$$= da_z\boldsymbol{k}\times\frac{1}{db_x\boldsymbol{i}+db_y\boldsymbol{j}\ +db_z\boldsymbol{k}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{db_x\boldsymbol{i}}{db_x\boldsymbol{i}}+\frac{db_y\boldsymbol{j}}{db_y\boldsymbol{j}}\right)=$$
$$= da_x\boldsymbol{i}\times\frac{db_y\boldsymbol{j}}{2\left(db_x\boldsymbol{i}+db_y\boldsymbol{j}\ +db_z\boldsymbol{k}\right)\cdot db_y\boldsymbol{j}}+da_x\boldsymbol{i}\times\frac{db_z\boldsymbol{k}}{2\left(db_x\boldsymbol{i}+db_y\boldsymbol{j}\ +db_z\boldsymbol{k}\right)\cdot db_z\boldsymbol{k}}+$$
$$+da_y\boldsymbol{j}\times\frac{db_x\boldsymbol{i}}{2\left(db_x\boldsymbol{i}+db_y\boldsymbol{j}\ +db_z\boldsymbol{k}\right)\cdot db_x\boldsymbol{i}}+da_y\boldsymbol{j}\times\frac{db_z\boldsymbol{k}}{2\left(db_x\boldsymbol{i}+db_y\boldsymbol{j}\ +db_z\boldsymbol{k}\right)\cdot db_z\boldsymbol{k}}+$$
$$+da_z\boldsymbol{k}\times\frac{db_x\boldsymbol{i}}{2\left(db_x\boldsymbol{i}+db_y\boldsymbol{j}\ +db_z\boldsymbol{k}\right)\cdot db_x\boldsymbol{i}}+da_z\boldsymbol{k}\times\frac{db_y\boldsymbol{j}}{2\left(db_x\boldsymbol{i}+db_y\boldsymbol{j}\ +db_z\boldsymbol{k}\right)\cdot db_y\boldsymbol{j}}=$$
$$=\frac{da_x\boldsymbol{i}\times db_y\boldsymbol{j}}{2db_y^2}+\frac{da_x\boldsymbol{i}\times db_z\boldsymbol{k}}{2db_z^2}+\frac{da_y\boldsymbol{j}\times db_x\boldsymbol{i}}{2db_x^2}+$$
$$+\frac{da_y\boldsymbol{j}\times db_z\boldsymbol{k}}{2db_z^2}+\frac{da_z\boldsymbol{k}\times db_x\boldsymbol{i}}{2db_x^2}+\frac{da_z\boldsymbol{k}\times db_y\boldsymbol{j}}{2db_y^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{da_xdb_y}{db_y^2}\boldsymbol{k}-\frac{da_xdb_z}{db_z^2}\boldsymbol{j}-\frac{da_ydb_x}{db_x^2}\boldsymbol{k}+\frac{da_ydb_z}{db_z^2}\boldsymbol{i}+\frac{da_zdb_x}{db_x^2}\boldsymbol{j}-\frac{da_zdb_y}{db_y^2}\boldsymbol{i}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{da_x}{db_y}\boldsymbol{k}-\frac{da_x}{db_z}\boldsymbol{j}-\frac{da_y}{db_x}\boldsymbol{k}+\frac{da_y}{db_z}\boldsymbol{i}+\frac{da_z}{db_x}\boldsymbol{j}-\frac{da_z}{db_y}\boldsymbol{i}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{da_y}{db_z}-\frac{da_z}{db_y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{da_z}{db_x}-\frac{da_x}{db_z}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{da_x}{db_y}-\frac{da_y}{db_x}\right)\boldsymbol{k}\right].\blacksquare$$

Представляет интерес частный случай, когда берется векторная производная по радиус-вектору $\boldsymbol{r}$.

$$d\boldsymbol{a}\times\frac{1}{d\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{da_y}{dz}-\frac{da_z}{dy}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{da_z}{dx}-\frac{da_x}{dz}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{da_x}{dy}-\frac{da_y}{dx}\right)\boldsymbol{k}\right]=-\frac{1}{2}rot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{a}.$$

Следствие. Имеет место формализм

$$d\times\frac{1}{d\boldsymbol{r}}=-\frac{1}{2}\nabla\times.$$

Приведенное выше замечание обусловливает следующие две теоремы.

Теорема 7. Имеет место формула

$$d\boldsymbol{a}\times\frac{1}{db\boldsymbol{e}_1}=\frac{a_3}{db}\boldsymbol{e}_2-\frac{a_2}{db}\boldsymbol{e}_3. \tag{3}$$

Доказательство:

$$d\boldsymbol{a}\times\frac{1}{db\boldsymbol{e}_1}=d(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\times\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1}=(da_1\boldsymbol{e}_1+da_2\boldsymbol{e}_2+da_3\boldsymbol{e}_3)\times\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1}=$$
$$=da_1\boldsymbol{e}_1\times\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1}\cdot\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1}+da_2\boldsymbol{e}_2\times\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1}\cdot\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1}+da_3\boldsymbol{e}_3\times\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1}\cdot\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1}=$$
$$=da_1\boldsymbol{e}_1\times\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1\cdot db_1\boldsymbol{e}_1}+da_2\boldsymbol{e}_2\times\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1\cdot db_1\boldsymbol{e}_1}+da_3\boldsymbol{e}_3\times\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1\cdot db_1\boldsymbol{e}_1}=$$
$$=\frac{da_1\boldsymbol{e}_1\times db_1\boldsymbol{e}_1}{db^2}+\frac{da_2\boldsymbol{e}_2\times db_1\boldsymbol{e}_1}{db^2}+\frac{da_3\boldsymbol{e}_3\times db_1\boldsymbol{e}_1}{db^2}=$$
$$=\frac{da_2db}{db^2}\boldsymbol{e}_3+\frac{a_3db}{db^2}\boldsymbol{e}_2=\frac{a_3}{db}\boldsymbol{e}_2-\frac{da_2}{db}\boldsymbol{e}_3\,.\blacksquare$$

Теорема 8. Имеет место формула

$$d\boldsymbol{a}\times\frac{1}{d(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)}=-\frac{da_3}{2db_2}\boldsymbol{e}_1+\frac{da_3}{2db_1}\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{a_1}{db_2}-\frac{a_2}{db_1}\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Доказательство:

$$d\boldsymbol{a}\times\frac{1}{d(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)}=d(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\times\frac{1}{d(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)}=$$
$$=(da_1\boldsymbol{e}_1+da_2\boldsymbol{e}_2+da_3\boldsymbol{e}_3)\times\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2}=$$
$$=da_1\boldsymbol{e}_1\times\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2}\cdot\frac{db_2\boldsymbol{e}_2}{db_2\boldsymbol{e}_2}+da_2\boldsymbol{e}_2\times\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2}\cdot\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1}+$$
$$+da_3\boldsymbol{e}_3\times\frac{1}{db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1\boldsymbol{e}_1}+\frac{db_2\boldsymbol{e}_2}{db_2\boldsymbol{e}_2}\right)=$$
$$=da_1\boldsymbol{e}_1\times\frac{db_2\boldsymbol{e}_2}{(db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2)db_2\boldsymbol{e}_2}+da_2\boldsymbol{e}_2\times\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{(db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2)db_1\boldsymbol{e}_1}+$$
$$+da_3\boldsymbol{e}_3\times\frac{db_1\boldsymbol{e}_1}{2(db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2)db_1\boldsymbol{e}_1}+da_3\boldsymbol{e}_3\times\frac{db_2\boldsymbol{e}_2}{2(db_1\boldsymbol{e}_1+db_2\boldsymbol{e}_2)db_2\boldsymbol{e}_2}=$$
$$=\frac{da_1\boldsymbol{e}_1\times db_2\boldsymbol{e}_2}{db_2^2}+\frac{da_2\boldsymbol{e}_2\times db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1^2}+\frac{da_3\boldsymbol{e}_3\times db_1\boldsymbol{e}_1}{db_1^2}+\frac{da_3\boldsymbol{e}_3\times db_2\boldsymbol{e}_2}{db_2^2}=$$
$$=\frac{da_1db_2}{db_2^2}\boldsymbol{e}_3-\frac{da_2db_1}{db_1^2}\boldsymbol{e}_3+\frac{da_3db_1}{2db_1^2}\boldsymbol{e}_2-\frac{da_3db_2}{2db_2^2}\boldsymbol{e}_1=$$
$$=-\frac{da_3}{2db_2}\boldsymbol{e}_1+\frac{da_3}{2db_1}\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{da_1}{db_2}-\frac{da_2}{db_1}\right)\boldsymbol{e}_3.\blacksquare$$

Пример 2. Точка совершает вращательное движение с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{k}\varepsilon$$

и тангенциальным ускорением

$$\boldsymbol{a}_\tau=-\boldsymbol{i}a\cdot sin\frac{\varepsilon t^2}{2}+\boldsymbol{j}a\cdot cos\frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где $\boldsymbol{k}\varepsilon$ – угловое ускорение.

В соответствии с (3)

$$d\boldsymbol{a}_\tau\times\frac{1}{d\boldsymbol{\omega}}=\frac{da_{\tau y}}{d\omega_z}\boldsymbol{i}-\frac{da_{\tau x}}{d\omega_z}\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}at\cdot sin\frac{\varepsilon t^2}{2}+\boldsymbol{j}at\cdot cos\frac{\varepsilon t^2}{2}=\boldsymbol{v},$$

т.е. результат является линейной скоростью точки.

Пример 3. Скорость точки равна

$$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{i}\omega Rsin\omega t+\boldsymbol{j}\omega Rcos\omega t+\boldsymbol{k}\omega^2Rt,$$

ускорение –

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}\omega^2Rcos\omega t-\boldsymbol{j}\omega^2Rsin\omega t+\boldsymbol{k}\omega^2R.$$

В соответствии с (2)

$$d\boldsymbol{a}\times\frac{1}{d\boldsymbol{v}}=\frac{1}{2}\left[\frac{da_y}{dv_z}\boldsymbol{i}-\frac{da_x}{dv_z}\boldsymbol{j}+\left(\frac{da_x}{dv_y}-\frac{da_y}{dv_x}\right)\boldsymbol{k}\right]=-\boldsymbol{i}\frac{\omega}{2}cos\omega t-\boldsymbol{j}\frac{\omega}{2}sin\omega t-\boldsymbol{k}\omega=-\omega^*.$$

Список использованных источников

1. Попов, И.П. Механические аналоги реактивной мощности / И.П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 3(30). – С. 37-39.
2. Попов, И.П. Комплексная мощность механических колебательных процессов / И.П. Попов // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. – 2016. – № 1. – С. 32-36.
3. Попов, И.П. Механическая мощность при колебательных технологических операциях / И.П. Попов // Вестник Псковского государственного университета. Технические науки. – 2015. – Вып. 2. – С. 15-18.
4. Попов, И.П. Интеграл Фурье и дискретные спектры / И.П. Попов // Математическое и программное обеспечение в промышленной и социальной сферах. – 2015. – № 2. – С. 9-12.
5. Попов, И.П. Колебательные системы с однородными элементами / И.П. Попов // Инженерная физика. – 2013. – № 3. – С. 52-56.
6. Попов, И.П. Свободные механические гармонические колебания, обусловленные преобразованием кинетической энергии в кинетическую / И.П. Попов // Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 6. – № 3(30). – С. 76-77.
7. Попов, И.П. О некоторых операциях над векторами / И.П. Попов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2014. – №5 (24). – С. 55-61.
8. Попов, И.П. Поверхностные градиент, дивергенция и ротор / И.П. Попов // Вестник Псковского государственного университета. Естественные и физико-математические науки. – 2014. – Вып. 5. – С. 159-172.

9. Попов, И.П. О мерах механического движения / И.П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 3(26). – С. 13-15.
10. Попов, И.П. Применение принципа суперпозиции при математическом моделировании состояний объекта / И.П. Попов, В.Г. Чумаков, В.И. Чарыков // Математическое и программное обеспечение в промышленной и социальной сферах. – 2016. – Т. 4. – № 1. – С. 8-12.

Материал поступил в редакцию: 12.03.2017
Материал принят к публикации: 25.04.2017

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

SCALAR AND VECTOR DERIVATIVES OF VECTOR FIELDS AND THEIR APPLICATION TO PROBLEMS OF MECHANICS

Popov I.P.

Abstract. The work is devoted to the operations of differentiation in the space of vector fields and smooth functions. In mechanics, it is widely used derivative of a scalar function of the vector. To some extent, like it is determined by the derivative of the vector to another vector. However, formally interpreting the derivative as division differentials are entered in consideration of scalar and vector derived vector on another vector, which may have application to the solution of problems of mechanics. The definition of a derivative of a scalar vector field on another vector field. We prove a theorem on the representation of the scalar derivative in the form of a combination of partial derivatives. As a typical particular case is considered a scalar derivative in the radius vector, generating formalism linking it with the operator nabla. It is noted that in solving some problems in the mechanics to simplify the calculation coordinate system is chosen so that at least some vectors direction coincides with one of the coordinate axes. If it concerns the vector for derivation to be performed, in such cases, the formula for the three-dimensional case can not be used because some of this vector differentials are equal to zero. This circumstance makes it necessary to prove two theorems for the two-dimensional and one-dimensional case. The definition of a vector derivative of a vector field on another vector field. We prove a theorem on the representation of the derivative vector as a combination of partial derivatives. As a typical particular case considered vector derivative of the radius vector, generating formalism linking it with the operator nabla. We prove similar theorems for two-dimensional and one-dimensional case. We give examples of applications of these results to problems of mechanics.

***Keywords*:** Vector field, the scalar derivative, derivative vector, pointing vector, acceleration, speed.

Referances

1. Popov I.P. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Informatika* [Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2015, no 3(30), pp. 37-39. (In Russ.)
2. Popov I.P. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta putey soobscheniya* [The Siberian Transport University Bulletin], 2016, no 1, pp. 32-36. (In Russ.)
3. Popov I.P. *Vestnik Pskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Tehnicheskie nauki*, 2015, no 2, pp. 15-18. (In Russ.)
4. Popov I.P. *Matematicheskoe i programmnoe obespechenie v promyishlennoy i sotsialnoy sferah* [Software of System in Industrial and Social Fields], 2015, no 2, pp. 9-12. (In Russ.)
5. Popov I.P. *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2013, no 3, pp 52-56. (In Russ.)
6. Popov I.P. *Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennyie nauki*, 2013, vol. 6, no 3(30), pp. 76-77. (In Russ.)
7. Popov I.P. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Fizika*, 2014, no 5 (24), pp. 55-61. (In Russ.)
8. Popov I.P. *Vestnik Pskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennyie i fiziko-matematicheskie nauki*, 2014, vol. 5, pp. 159-172. (In Russ.)
9. Popov I.P. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Informatika* [Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2014, no 3(26), pp. 13-15. (In Russ.)
10. Popov I.P. *Matematicheskoe i programmnoe obespechenie v promyishlennoy i sotsialnoy sferah* [Software of System in Industrial and Social Fields], 2016, vol. 4, no 1, pp. 8-12. (In Russ.)

ОБ АВТОРАХ:

Попов Игорь Павлович – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета. E-mail: ip.popow@yandex.ru.

ОБРАЗЕЦ ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Попов И.П. Скалярная и векторная производные векторных полей и их приложение к задачам механики // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2017. – Т.5. – №1. – С. 2-7.

Popov, I.P. (2017) Scalar and vector derivatives of vector fields and their application to problems of mechanics. Software of systems in the industrial and social fields, 4 (1): 2-7.