УДК 517. 926

ГЛАВНЫЕ АСИМПТОТИКИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Муртазина С.А.

Аннотация. Рассматривается динамическая система с периодическими коэффициентами зависящая от скалярного параметра. Одной из наиболее актуальных задач в теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами является исследование поведения системы в окрестности стационарных решений. Особо актуальными представляются исследования поведения системы в предположении, что стационарное решение является негиперболическим. В этом случае в системе происходит различные бифуркационные явления, возникают новые периодические или квазипериодические решения и т. д. В данной статье рассматривается задача о бифуркации вынужденных колебаний динамических систем с периодическими коэффициентами. Приводятся главные асимптотики вынужденных колебаний и соответствующих значений параметров, которые приводят новым критериям устойчивости возникающих периодических решений. Полученные формулы позволяют доказать обмен устойчивостью между нулевой точкой равновесия и возникающими при бифуркации решениями.

Ключевые слова. Бифуркация, вынужденные колебания, периодические решения, устойчивость, обмен устойчивостью.

THE MAIN ASYMPTOTICS OF ONE-PARAMETRIC DYNAMIC SISTEMS' FORCED OSCILLATIONS

Murtazina S.A.

Abstract. The local bifurcation problem of one-parametric forced oscillations dynamic systems was consider. We give the main asymptotics of forsed oscillations and parameter values in which we get these solutions in the article. They lead to new stability criterias of periodic solutions. These formulas also allow us to prove the exchange of stability between the zero point of equilibrium and forsed oscillations.

Keywords. The bifurcation, the forced oscillations, the periodic solutions, the stability, exchange by stability.

Постановка задачи

Рассматривается система, динамика которой описывается дифференциальным уравнением, зависящим от скалярного параметра μ и -периодической по t правой частью:

$$x' = \big(A_0 + (\mu - \mu_0)A_1(t) + A_2(t,\mu)\big)x + a(x,t,\mu),\ x \in R^N. \qquad (1)$$

Ниже будет предполагаться, что система (1) при всех значениях параметра μ имеет нулевую точку равновесия $x = 0$, правая часть непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x и μ; каждое начальное условие $x(t_0) = x_0$ однозначно задает решение $x(t)$ уравнения (1), определенное при всех t; матрица $A_2(t,\mu)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению $\|A_2(t,\mu)\| = O(|\mu - \mu_0|^2)$ при $|\mu - \mu_0| \to 0$; нелинейность $a(x,t,\mu)$ равномерно по t и μ удовлетворяет соотношению $\|a(x,t,\mu)\| = O\|x\|^2$ при $\|x\| \to 0$.

Рассматривается случай, в котором состояние равновесия $x = 0$ системы (1) при некотором $\mu = \mu_0$ является негиперболическим, т.е. матрица A_0 имеет одно или несколько собственных значений на мнимой оси. При таком μ_0 система (1) структурно неустойчива в окрестности состояния равновесия $x = 0$ и в системе (1) возможны различные локальные бифуркации в окрестности решения $x = 0$. В частности, при малейшем изменении правой части системы, вызванным изменением параметра, возможно возникновение ненулевых – периодических решений (бифуркация вынужденных колебаний), ненулевых -периодических решений (бифуркация субгармонических колебаний) и др. В этом случае значение μ_0 называют точкой бифуркации. Задача о таких бифуркациях изучаются во многих работах [1-9, 15]. В статье приводятся главные асимптотики возникающих при бифуркации периодических решений и соответствующих значений параметров системы (1) на основе развития разработанных в [11-13] операторных методов исследования локальных бифуркаций. Приведенные формулы приводят новым критериям устойчивости вынужденных колебаний, также позволяют доказать обмен устойчивостью между нулевым решением и возникающими периодическими решениями системы (1).

Пусть для системы (1) выполнены два условия: $U1$) матрица A_0 имеет простое собственное значение 0 и остальные ее собственные значения не принадлежат мнимой оси; $U2$) $\xi_0 = \int_0^T (A_1(t)e, e^*)\,dt \neq 0$, где e и e^*собственные векторы, отвечающие простому собственному значению 0 матриц A_0 и A_0^* соответственно; здесь A_0^* – транспонированная к A_0 матрица. Векторы e и e^* можно считать выбранными в соответствии с равенствами

$\|e\| = \|e^*\| = 1$ и $(e, e^*) = 1$. При выполнении условия $U1$ основным сценарием в системе (1) является бифуркация вынужденных колебаний.

Значение μ_0 параметра μ называют точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (1), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое$\mu = \mu(\varepsilon)$, при котором система (1) имеет ненулевое -периодическое решение $x(t,\varepsilon)$,причем $\mu(\varepsilon) \to \mu_0$ и $\max_t\|x(t,\varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия $U1$-$U2$. Тогда μ_0 является точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (1) [14].

Пусть H_0 – это одномерное подпространство пространства R^N, содержащее вектор e. H_0 является собственным подпространством оператора $V(\mu_0) = e^{A_0T}$, отвечающим простомусобственному значению 1. Пространство R^N может быть представлено в виде $R^N = H_0 \oplus H^0$, где H^0 – дополнительное к H_0 инвариантное для $V(\mu_0)$ подпространство.

Считая без ограничения общности, что $\mu_0 \neq 0$, определим действующий в пространстве R^N оператор

$$\Gamma_0 y = h_0 + h^0, y \in R^N, h_0 \in H_0, h^0 \in H^0,$$
$$h_0 = -\frac{(y,e^*)e}{\mu_0\xi_0}, h^0 = (I - e^{A_0t})^{-1}\left[y - \frac{(y,e^*)x_1(T)}{\xi_0}\right], \qquad (2)$$

где ξ_0 – число из условия $U2$, $x_1(t) = \int_0^t e^{A_0(t-s)}A_1(s)e_0(s)\,ds$.

Ниже будем считать, что нелинейность $a(x,t,\mu)$ в уравнении (2) представима в одном из следующих видов:

$$a(x,t,\mu) = a_2(x,t,\mu) + \widetilde{a_3}(x,t,\mu), \qquad (3)$$

$$a(x,t,\mu) = a_3(x,t,\mu) + \widetilde{a_4}(x,t,\mu), \qquad (4)$$

где $a_2(x,t,\mu)$ и $a_3(x,t,\mu)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а нелинейности $\widetilde{a_3}(x,t,\mu)$ и $\widetilde{a_4}(x,t,\mu)$ удовлетворяют соотношениям $\|\widetilde{a_3}(x,t,\mu)\| = O(\|x\|^3)$ и $\|\widetilde{a_4}(x,t,\mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$ равномерно по t и μ.

Тип бифуркации

Теорема 2. Пусть нелинейность $a(x,t,\mu)$ имеет вид (3). Тогда существующие в условиях теоремы 1 бифурцирующие решения $x(t,\varepsilon)$ системы (2) и соответствующие значения параметра $\mu(\varepsilon)$ представимы в виде:

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon e_0(t) + \varepsilon^2 e_1(t) + o(\varepsilon^2),$$
$$\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + o(\varepsilon), \qquad (5)$$

где $e_1(t)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = A_0x + \mu_1A_1(t)e_0(t) + a_2(e_0(t),t,\mu_0), \\ x(0) = e_1 \end{cases}$$

и

$$e_1 = \Gamma_0 v_2, \mu_1 = -\frac{(v_2,e^*)}{\xi_0}, v_2 = e^{A_0T}\int_0^T e^{-A_0t}a_2(e_0(t),t,\mu_0)\,dt,$$

Γ_0 – оператор (2) [14].

Формулы вида (5) будем называть главными асимптотиками бифурцирующих решений $x(t,\varepsilon)$ и $\mu = \mu(\varepsilon)$ уравнения (1).

Из теоремы 1 следует, что если нелинейность $a(x,t,\mu)$ начинается с квадратичных слагаемых, то главные асимптотики бифурцирующих решений уравнения (1) имеют вид (5). Ясно, что в формулах (5) вместо e можно использовать и вектор $-e$; в этом случае вместо e^* следует использовать вектор $-e^*$. При этом вектор-функция $e_1(t)$ из (5) не изменится, а число μ_1 поменяет знак. Следовательно, верна

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 выполнено равенство (3), при этом $\left(\int_0^T a_2(e_0(t),t,\mu_0), e^*\right)dt \neq 0$.

Тогда в системе (1) реализуется сценарий транскритической бифуркации: семейство бифурцирующих решений $x(t,\varepsilon)$ уравнения (2) существуют как при $\mu < \mu_0$, так и при

$\mu > \mu_0$, при этом для каждого такого значения μ существует в точности одно периодическое решение $x(t,\varepsilon)$.

Пусть для определенности $\mu_1 > 0$. Тогда при всех малых $\varepsilon > 0$ уравнение (2) при $\mu = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + o(\varepsilon) > \mu_0$ имеет периодические решения $x_+(t,\varepsilon) = \varepsilon e_0(t) + \varepsilon^2 e_1(t) + o(\varepsilon^2)$, а при $\mu = \mu_0 - \varepsilon\mu_1 + o(\varepsilon) < \mu_0$ – решения$x_-(t,\varepsilon) = -\varepsilon e_0(t) + \varepsilon^2 e_1(t) + o(\varepsilon^2)$.

Теорема 4. Пусть нелинейность $a(x,t,\mu)$ имеет вид (4). Тогда существующие в условиях теоремы 1 бифурцирующие решения $x(t,\varepsilon)$ системы (2) и соответствующие значения параметра $\mu(\varepsilon)$представимы в виде:

$$\begin{gathered} x(t,\varepsilon) = \varepsilon e_0(t) + \varepsilon^3 e_2(t) + o(\varepsilon^2), \\ \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon^2\mu_2 + o(\varepsilon), \end{gathered} \tag{6}$$

где $e_2(t)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = A_0 x + \mu_2 A_1(t) e_0(t) + a_3(e_0(t),t,\mu_0), \\ x(0) = e_2 \end{cases}$$

и

$$e_2 = \Gamma_0 v_3,\ \mu_1 = -\frac{(v_3,e^*)}{\xi_0},\ v_3 = e^{A_0 T}\int_0^T e^{-A_0 t} a_3(e_0(t),t,\mu_0)\,dt,$$

Γ_0 – оператор (2) [14].

Таким образом, если нелинейность $a(x,t,\mu)$ начинается скубических слагаемых, то главные асимптотики бифурцирующих решений уравнения (2) имеют вид (6). Легко видеть, что вектор-функция $e_2(t)$ из (6) заменится на $-e_2(t)$, а число μ_2 не изменится, если заменить e на $-e$, а e^* на $-e^*$. Следовательно, верна теорема 4.

Теорема 5. Пусть в условиях теоремы 1 выполнено равенство (4), при этом

$$\left(\int_0^T a_2(e_0(t),t,\mu_0), e^*\right) dt \neq 0.$$

Тогда в системе (1) реализуется сценарий бифуркации типа вилки: бифурцирующие решения уравнения (1) возникают только при $\mu > \mu_0$ или только при $\mu < \mu_0$, при этом для каждого такого значения μ существует в точности два периодических решения $x(t,\varepsilon)$. Данные семейства бифурцирующих решений имеют вид

$$\begin{gathered} x_+(t,\varepsilon) = \varepsilon e_0(t) + \varepsilon^3 e_2(t) + o(\varepsilon^3), \\ x_-(t,\varepsilon) = -\varepsilon e_0(t) - \varepsilon^3 e_2(t) + o(\varepsilon^3). \end{gathered}$$

Обмен устойчивостью

В условиях теоремы 1 в системе (1) присходит обмен устойчивостью между возникающим семейством вынужденных колебаний $x(t,\varepsilon)$ и нулевым решением.

Пусть в системе (1) реализуется сценарий транскритической бифуркации.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда нулевое решение $x = 0$ и семейство периодических решений $x(t,\varepsilon)$ системы (1) имеют противоположные типы устойчивости при $\mu = \mu(\varepsilon)$, а именно решение $x = 0$ асимптотически устойчиво (неустойчиво) тогда и только тогда, когда решения $x(t,\varepsilon)$ неустойчивы (асимптотически устойчивы).

Пусть теперь в системе (1) реализуется сценарий бифуркации типа вилки.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда нулевое решение $x = 0$ и семейство периодических решений $x(t,\varepsilon)$ системы (1) имеют противоположные типы устойчивости при $\mu = \mu(\varepsilon)$, а именно решение $x = 0$ асимптотически устойчиво (неустойчиво) тогда и только тогда, когда решения $x(t,\varepsilon)$ неустойчивы (асимптотически устойчивы).

Критерии устойчивости

В условиях теоремы 1 приведем критерии устойчивости вынужденных колебаний $x(t,\varepsilon)$ системы (2) возникающих при $\mu = \mu(\varepsilon)$.

Теорема 8. Пусть в системе (1) реализуется сценарий транскритической бифуркации. При всех малых значениях $\varepsilon > 0$ T-периодические вынужденные колебания $x(t,\varepsilon)$ системы (1) асимптотически устойчивы, если

$$\left(\int_0^T a_2(e_0(t),t,\mu_0),e^*\right)dt<0$$

и неустойчивы в противном случае.

Пусть, для определенности семейство точек равновесий $x_+(t,\varepsilon)$ системы (1) определяемые по формуле (5) возникают при $\mu>\mu_0$ и устойчивы, тогда нулевое решение той же системы при $\mu>\mu_0$ будет неустойчивым. В тоже время второе семейство периодических решений $x_-(t,\varepsilon)$ системы (1), которое возникает при $\mu<\mu_0$ будет неустойчивым, а нулевое решение той же системы при $\mu<\mu_0$будет устойчивым.

Теорема 9. Пусть в системе (1) реализуется сценарий бифуркации типа вилки. При всех малых значениях $\varepsilon>0$ T-периодические вынужденные колебания $x(t,\varepsilon)$ системы (1) определяемые соотношением (6) асимптотически устойчивы, если

$$\left(\int_0^T a_3(e_0(t),t,\mu_0),e^*\right)dt<0$$

и неустойчивы в противном случае.

Пусть для определенности, оба семейства периодических решений системы (1) возникают при $\mu>\mu_0$ и являются устойчивыми, тогда нулевое решение той же системы при $\mu>\mu_0$ будет неустойчивым. В то же время нулевое решение системы (1) при $\mu<\mu_0$ является устойчивым.

Список использованных источников

1. Арнольд, В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика', 2000.
2. Гукенхеймер, Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – Москва-Ижевск : Ин-т компьют. исслед., 2002.
3. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1975. – 740 с.
4. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966.
5. Красносельский, М. А. Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений / М.А. Красносельский, , М.Г. Юмагулов // ДАН России. – 1995. –Т. 365, № 2, – С. 162-164.
6. Нейштадт, А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях I, II. // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т.23, Вып.12. – С. 2060-2067.
7. Острейковский, В.А. Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф. – М. : Высш. шк., 2005.
8. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л.П. Шильников [и др.]. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – Ч. 1.
9. Rachinskii, D. Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlinear terms / D. Rachinskii, K. Schneider // J. Different. Equat. – 2005. – V.210. – P.65-86.
10. Розо, М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. – М. : Наука, 1971. – 288с.
11. Юмагулов, М.Г. Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 424, № 2. – С. 177-180.
12. Ибрагимова Л.С. Функционализация параметра и ее приложения в задаче о локальных бифуркациях динамических систем / Л.С. Ибрагимова, М.Г. Юмагулов // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 4. – С. 3-12.
13. Операторный метод исследования локальных бифуркаций многопараметрических динамических систем / М.Г. Юмагулов [и др.] // Вестник Санкт-Петербургского госуниверситета. Серия 10 (Прикладная математика, информатика, процессы управления). – 2009. – вып. 2. – С. 146-155.
14. Юмагулов, М.Г. Исследование локальных бифуркаций вынужденных колебаний динамических систем / М.Г. Юмагулов, С.А. Муртазина // Автомат. и телемех. – 2012. – № 4. – С. 83-98.
15. Юмагулов, М.Г. Задача о субгармонических колебаниях уравнения Дуффинга / М.Г. Юмагулов, Э.С. Суюндукова // МиПОС. – 2012. – № 2.– С. 125-129.

Муртазина Сария Аширафовна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий СИ (филиала) БашГУ. E-mail: sariamurtaz@mail.ru.

Муртазина С. А. Главные асимптотики вынужденных колебаний однопараметрических динамических систем // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2016. – Т.4. – №2 – С. 17-20.

Murtazina, S.A. (2016) The main asymptotics of one-parametric dynamic sistems’ forced oscillations. Software of systems in the industrial and social fields, 4 (2): 17-20.