УДК 517.92

ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИКЛОВ В ЗАДАЧЕ О ЯЗЫКАХ АРНОЛЬДА

Фазлытдинов М.Ф., Юмагулов М.Г.

Аннотация. В статье рассматривается вопрос об устойчивости периодических решений в задачах о языках Арнольда дискретных динамических систем. Получены формулы для определения типа устойчивости возникающих периодических решений.

Ключевые слова. Динамическая система, языки Арнольда, бифуркация, периодическое решение.

SIGNS OFSTABILITY OF CYCLESIN THE PROBLEMSOFARNOLD'S TONGUES

Fazlytdinov M.F., Yumagulov M.G.

Abstract. The article discusses stability of periodic solutions in Arnold's tongues problems of discrete dynamical systems. Formulas for definition of stability type of arising periodic solutions are received.

Keywords. Dynamical system, Arnold's tongues, bifurcation, periodic solution.

Постановка задачи.

Рассматривается зависящая от двух скалярных параметров α и β двумерная динамическая система с дискретным временем

$$x_{n+1} = A(\alpha,\beta)x_n + a_2(x_n) + a_3(x_n) + \tilde{a}_4(x_n), \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

где $x_n \in R^2$, $A(\alpha,\beta) = (1+\alpha)Q(\beta)$,

$$Q(\beta) = \begin{pmatrix} cos2\pi(\theta_0+\beta) & -sin2\pi(\theta_0+\beta) \\ sin2\pi(\theta_0+\beta) & cos2\pi(\theta_0+\beta) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь $\theta_0 = \frac{p}{q}$ – несократимаярациональная дробь такая, что$0 \le \theta_0 \le \frac{1}{2}$. Нелинейности $a_2(x)$ и $a_3(x)$содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а$\tilde{a}_4(x)$ является гладкой поx, при этом $\tilde{a}_4(x) = O(|x|^4),\ x \to 0$.

Для системы (1) вектор $x^* = (0,0)$ является точкой равновесия для любых α, β. При $(\alpha_0,\beta_0) = (0,0)$ эта точка является негиперболической, так как собственные значения матрицы $A(0,0)$ равны $\lambda = e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$.

В указанных условиях при близких значениях параметров (α,β) к (α_0,β_0), у системы (1) могут возникать -циклы (бифуркации q-циклов). Соответствующие значения параметров α и β заполняют клювообразное множество на плоскости параметров. Данные множества своим острием упираются в точку $(\alpha_0,\beta_0) = (0,0)$. Такие множества получили название языков Арнольда [1].

В настоящей статье рассматривается вопрос об устойчивости q −циклов системы (1), возникающихв окрестности точки $x^* = (0,0)$. Будем отдельно рассматривать случай $1 \le q \le 4$ (сильный резонанс) и $q > 4$ (слабый резонанс). При этом будем различать случаи четного и нечетного значений q.

Основные утверждения

Ниже используются вектор-функции:

$$b_2(x) = \sum_{i=1}^{q} A^{q-i}\, a_2\big(A^{i-1}x\big),$$

$$b_3(x) = \sum_{i=1}^{q} A^{q-i}\, a_3\big(A^{i-1}x\big) + g_3(x), \tag{3}$$

$$g_3(x) = \sum_{i=2}^{q}\Big[A^{q-i}a'_{2x}(A^{i-1}x)\sum_{j=0}^{i-2}A^j a_2(A^{i-2-j}x)\Big],$$

где $A = A(0,0)$, a'_{2x} – матрица Якоби вектор-функции $a_2(x)$.

Далее для фиксированных векторов e и g, выбранных из соотношений $|e| = 1$, $|g| = 1$, $(e,g) = 0$ определим матрицу D в зависимости от значения q:

при $q = 1,3$

$$D = -(b_2(e),e)I - (b_2(e),g)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b'_{2x}(e); \tag{4}$$

при $q = 2,4$ и $q > 4$

$$D = -(b_3(e),e)I - (b_3(e),g)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b'_{3x}(e); \tag{5}$$

где b'_{2x} и b'_{3x} – матрицы Якоби вектор-функций из (3).

В работе [2] получены асимптотические формулы для бифурцирующих решений, определяющих -циклы системы (1). Эти решения удобно представлять в параметрическом де $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ и $x = x(\varepsilon)$, где ε – положительный малый параметр. Приведем эти формулы.

При $q = 1{,}3$

$$\begin{cases} \alpha(\varepsilon) = \varepsilon\alpha_1 + \alpha_2(\varepsilon); \\ \beta(\varepsilon) = \varepsilon\beta_1 + \beta_2(\varepsilon); \\ x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + e_2(\varepsilon)/ \end{cases} \tag{6}$$

При $q = 2{,}4$ и $q > 4$

$$\begin{cases} \alpha(\varepsilon) = \varepsilon^2\alpha_2 + \alpha_3(\varepsilon); \\ \beta(\varepsilon) = \varepsilon^2\beta_2 + \beta_3(\varepsilon); \\ x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^3 e_2 + e_3(\varepsilon). \end{cases} \tag{7}$$

где $\alpha_1 = -\frac{1}{q}(b_2(e), e)$, $\beta_1 = -\frac{1}{2\pi q}(b_2(e), g)$, $e_1 = \alpha_1 e + \beta_1 g$, $\alpha_2 = -\frac{1}{q}(b_3(e), g)$, $\beta_2 = -\frac{1}{2\pi q}(b_3(e), g)$, $e_2 = \alpha_2 e + \beta_2 g$.

Функции $\alpha_2(\varepsilon)$, $\beta_2(\varepsilon)$, $e_2(\varepsilon)$, $\alpha_3(\varepsilon)$, $\beta_3(\varepsilon)$, $e_3(\varepsilon)$ – это некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям: $\alpha_2(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, $\beta_2(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, $|e_2(\varepsilon)| = o(\varepsilon^2)$, $\alpha_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$, $\beta_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$, $|e_3(\varepsilon)| = o(\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \to 0$.

Верна следующая

Теорема 1. Пусть все собственные значения матрицы D имеют отрицательные действительные части. Тогда при малых εq – циклы системы (1), стартующие из точки$x(\varepsilon)$, являются устойчивыми. Если хотя бы одно собственное значение матрицы D имеет положительную действительную часть, то q– циклы системы (1), стартующие из точки$x(\varepsilon)$, являются неустойчивыми.

В этой теореме под устойчивостью подразумевается устойчивость по Ляпунову. Доказательство теоремы будет приведено ниже.

Пример 1. Пусть $q = 1$ и $a_2(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$, $a_3(x) \equiv 0$, $\tilde{a}_4(x) \equiv 0$. В качестве векторов e и g возьмем вектор-функции $e(t) = \begin{pmatrix} cos\,(t) \\ sin\,(t) \end{pmatrix}$ и $g(t) = \begin{pmatrix} -sin\,(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}$, где $t \in [0; 2\pi)$. Рассмотрим поведение собственных значений матрицы (4) при каждом фиксированном t. Имеем

$$\left(b_2\big(e(t)\big),\ e(t)\right) = \left(\begin{pmatrix} cos^2(t) - sin^2(t) \\ 2cos\,(t)sin\,(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos\,(t) \\ sin\,(t) \end{pmatrix}\right) = cos\,(t),$$

$$\left(b_2\big(e(t)\big),\ g(t)\right) = \left(\begin{pmatrix} cos^2(t) - sin^2(t) \\ 2cos\,(t)sin\,(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -sin\,(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}\right) = sin\,(t).$$

Подставляя в (4) получим

$$D(t) = -cos(t)\,I - sin(t)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\,cos(t) & -2\,sin(t) \\ 2\,sin(t) & 2\,cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $D(t)$ равны $\lambda_{1,2} = cos(t) \pm i\,sin(t)$. Действительные части собственных значения матрицы D отрицательные при $t \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Таким образом, неподвижная точка $x(\varepsilon)$ является устойчивой при выборе в качестве e вектора $e(t)$ при каждом фиксированном $t \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Пример 2. Пусть $q = 2$ и $a_3(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix}$, $a_2(x) \equiv 0$, $\tilde{a}_4(x) \equiv 0$. Векторы e и g такие же, как в примере 1. Тогда:

$$\left(b_3\big(e(t)\big), e(t)\right) = \left(\begin{pmatrix} -2\,cos^3(t) \\ -2sin^3(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos\,(t) \\ sin\,(t) \end{pmatrix}\right) = -2\,(cos^4(t) + sin^4(t)).$$

$$\left(b_3\big(e(t)\big), g(t)\right) = \left(\begin{pmatrix} -2\,cos^3(t) \\ -2sin^3(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -sin\,(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}\right) =$$

$$= 2\,cos^3(t)\,sin(t) - 2\,sin^3(t)\,cos(t) = sin(2t)\,cos(2t).$$

Подставляя в (5) получим

$$D(t) = 2(cos^4(t) + sin^4(t))I - sin(2t)\,cos(2t)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} cos^2(t) & 0 \\ 0 & sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы D равны

$\lambda_{1,2} = 2\,cos^4(t) + 2\,sin^4(t) - 3\,cos^2(t) - 3\,sin^2(t) \pm \sqrt{2\,cos^2(2t)\,(2 - 2\,sin^2(2t))}.$

Действительные части собственных значений матрицы отрицательные при

$$t \in [0{,}48; 1{,}1] \cup [2{,}05; 2{,}67] \cup [3{,}62; 4{,}24] \cup [5{,}2; 5{,}81].$$

Таким образом -циклы, стартующие из точки $x(\varepsilon)$ являются устойчивыми при выборе вектора $e = e(t)$, $t \in [0{,}48; 1{,}1] \cup [2{,}05; 2{,}67] \cup [3{,}62; 4{,}24] \cup [5{,}2; 5{,}81]$.

Доказательство теоремы 1.

Для доказательства теоремы используется следующая очевидная лемма.

Лемма 1. Пусть $G(\varepsilon) = I + \varepsilon D$, где ε положительный малый параметр. Пусть D имеет собственные значения λ_1, λ_2. Тогда если:

1) $Re\lambda_j < 0 \;\; \forall j \Rightarrow \rho\big(G(\varepsilon)\big) < 1$;

2) $\exists\;\; j$ при котором верно $Re\lambda_j > 0 \Rightarrow \rho\big(G(\varepsilon)\big) > 1$.

Здесь $\rho\big(G(\varepsilon)\big) = max\big|\mu_j\big|$, где μ_j – собственные значения матрицы $G(\varepsilon)$.

Задача о q −циклах системы (1) в естественном смысле равносильна задаче о неподвижных точках системы

$$x_{n+1} = B(\alpha,\beta)x_n + b_2(x_n) + b_3(x_n) + \tilde{b}_4(x_n). \tag{8}$$

где $B(\alpha,\beta) = A^q(\alpha,\beta)$, $b_2(x_n)$ и $b_3(x_n)$ определены в (3), $\tilde{b}_4(x_n)$ является гладкой по x, при этом $\tilde{b}_4(x) = O(|x|^4), x \to 0$. Другими словами, вопрос об устойчивости q −циклов системы (1), стартующих из точек $x = x(\varepsilon)$, сводится к вопросу изучения поведения собственных значений матрицы

$$G\big(x(\varepsilon),\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)\big) = F'\big(x(\varepsilon),\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)\big),$$

где $F'\big(x(\varepsilon),\;\alpha(\varepsilon),\;\beta(\varepsilon)\big)$ – матрица Якоби правой части системы (8).

Имеем:

$$G\big(x(\varepsilon),\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)\big) = B(\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)) + b'_{2x}(x(\varepsilon)) + b'_{3x}\big(x(\varepsilon)\big) + \tilde{b}'_{4x}(x(\varepsilon)). \tag{9}$$

где $b'_{2x}(x)$, $b'_{3x}(x)$ и $\tilde{b}'_{4x}(x)$ – матрицы Якоби соответствующих нелинейностей уравнения (8). Из приведенных выше формул (6) и (7) следует, что матрица $B(\alpha(\varepsilon),\;\beta(\varepsilon))$ представима в следующем виде:

$$B\big(\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)\big) = B(0{,}0) + \alpha(\varepsilon)B'_\alpha(0{,}0) + \beta(\varepsilon)B'_\beta(0{,}0) + o(\sqrt{\alpha^2(\varepsilon) + \beta^2(\varepsilon)}). \tag{10}$$

где $B(0{,}0) = I$, $B'_\alpha(0{,}0) = qI$, $B'_\beta(0{,}0) = 2\pi q\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, I – единичная матрица.

Случай $q = 1, 3$.

Будем рассматривать отдельные случаи значений q. Пусть сначала $q = 1$ или $q = 3$. В этом случае формулы для бифурцирующих решений принимают вид (6). Подставим (6) в (9) с учетом (10). В (9) $b'_{2x}(x)$ содержит x в первой степени, $b'_{3x}(x)$ – во второй степени, а $\tilde{b}'_{4x}(x)$ – x в степени больше трех. Тогда получим формулу, в которой матрица D соответствует формуле (4):

$$G\big(x(\varepsilon),\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)\big) = I + \varepsilon\left[\alpha_1 qI + \beta_1 2\pi q\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b'_{2x}(e)\right] + o(\varepsilon) =$$

$$I + \varepsilon\left[-(b_2(e),e)I - (b_2(e),g)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b'_{2x}(e)\right] + o(\varepsilon) = I + \varepsilon D + o(\varepsilon).$$

Отсюда из леммы 1 следует справедливость теоремы 1.

Случай $q = 2, 4$ или $q > 4$.

Пусть $q = 2,\ q = 4$ или $q > 4$. В этом случае доказательство теоремы проводится аналогично случаю $q = 1{,}3$, при этом используется формула (7) и следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $q-$ четно или $q-$ нечетно, $q > 4$. Тогда верно равенство $b'_{2x} = 0$.

Схема доказательства леммы 2.

Матрица Якоби имеет следующий вид $b'_{2x}(x) = \sum_{i=1}^{q} Q^{q-i} a'_{2x}\left(Q^{i-1}x\right)Q^{i-1}$.

Пусть сначала q – четно. С учетом равенства $Q^j = -Q^{\frac{q}{2}+j}$ получим:

$$b'_{2x}(x) = \sum_{i=1}^{q} Q^{q-i} a'_{2x}\left(Q^{i-1}x\right)Q^{i-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{q}{2}} \left[\underbrace{Q^{q-i}\, a'_{2x}\left(Q^{i-1}x\right)Q^{i-1} + Q^{\frac{q}{2}-i}\, a'_{2x}\left(Q^{\frac{q}{2}+i-1}x\right) Q^{\frac{q}{2}+i-1}}_{0}\right] = 0.$$

Теперь пусть q – нечетно и $q > 4$. Тогда выполнено равенство $Q^i = (Q^T)^{q-i}$. Положим $e(t) = (cos(t),\ sin(t))^T$ и $g(t) = (-sin(t), cos(t))^T$, где $t \in [0; 2\pi)$. А также определим векторы e^* и g^* такие, что $(e, e^*) = (g, g^*) = 1$ и $(e, g) = (g, e^*) = (e, g^*) = (e^*, g^*) = 0$. Если показать, что

$$(b'_{2x}(e)e, e^*) = (b'_{2x}(e)g, e^*) = (b'_{2x}(g)e, e^*) = (b'_{2x}(g)g, e^*) = (b'_{2x}(e)e, g^*) =$$
$$= (b'_{2x}(e)g, g^*) = (b'_{2x}(g)e, g^*) = (b'_{2x}(g)g, g^*) = 0,$$

то мы докажем утверждение леммы.

Ограничимся доказательством равенства $(b'_{2x}(e)e, e^*) = 0$. Остальные равенства доказываются аналогично. Имеем

$$(b'_{2x}(e)e, e^*) = \left(\sum_{i=1}^{q} Q^{q-i} a'_{2x}(Q^{i-1}e)Q^{i-1}e, e^*\right) = \sum_{i=1}^{q} (a'_{2x}(Q^{i-1}e)\, Q^{i-1}e, (Q^T)^{q-i}e^*) =$$
$$= \sum_{i=1}^{q} (a'_{2x}(Q^{i-1}e)\, Q^{i-1}e, Q^i e^*).$$

Определим функцию $f_2(t) = (a'_{2x}\left(e(t)\right)e(t), Qe^*(t))$ и число $h = \frac{2\pi}{q}$. Следуя [2] положим

$$G_{f_2}^{q} = [f_2(t) + f_2(t+h) + \cdots + f_2(t+(q-1)h]h = \Big[\left(a'_{2x}\left(e(t)\right)e(t), Qe^*(t)\right) +$$
$$+ \left(a'_{2x}\left(e(t+h)\right)e(t+h), Qe^*(t+h)\right) + \cdots$$
$$+ \left(a'_{2x}\left(e(t+(q-1)h)\right)e(t+(q-1)h), Qe^*(t+(q-1)h)\right)\Big] h =$$
$$= \left| Qe^*(t+h) = Q^2e^*(t), h = \frac{2\pi}{q} \Rightarrow Qe^*(t+kh) = Q^k e^*(t) \right| =$$
$$= \sum_{i=1}^{q} \left(a'_{2x}\left(Q^{i-1}e(t)\right) Q^{i-1}e(t), Q^i e^*(t)\right) h.$$

В данном случае для определенности предполагалось, что в дроби $\theta_0 = \frac{p}{q}$ числитель $p = 1$. В случаях $p > 1$ можно получить аналогичные результаты с учетом того, что

$$Qe^*(t+kh) = Q^{k+\chi}e^*(t)\ ,$$

где χ некоторое целое число. В результате получим $(b'_{2x}(e)e, e^*) = G_{f_2}^{q} \cdot \frac{q}{2\pi}$.

Функция $f_2(t)$ содержит слагаемые вида $c\, sin^i(t)\, cos^j(t)$, где c – константа, $i, j = \overline{0..3}$, $i + j = 3$. Следовательно, ее можно представить в виде сумм слагаемых вида $sin(mt)$, $cos(mt)$, где $m = 1{,}3$. Далее пользуясь леммой 10 из [2] и учитывая, что q – нечетное, получим нужное равенство $(b'_{2x}(e)e, e^*) = 0$. Лемма 2 доказана.

В силу леммы верно равенство:

$$G\left(x(\varepsilon), \alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)\right) = I + \varepsilon^2 \left[\alpha_2 qI + \beta_2 2\pi q \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_{3x}(e)\right] + o(\varepsilon^2) =$$
$$= I + \varepsilon^2 \left[-(b_3(e), e)I - (b_3(e), g) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_{3x}(e)\right] = I + \varepsilon^2 D + o(\varepsilon^2).^{I}$$

В данной формуле матрица D соответствует матрице в (5). Отсюда и из леммы 1 следует справедливость теоремы 1.

Пример 3.

Рассмотрим двумерную дискретную динамическую систему, зависящую от двух параметров r и ε, приведенную в работе [4].

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ где} u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, f(u) = \begin{pmatrix} rx(1-y)+\varepsilon \\ x \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

В окрестности неподвижной точки системы $u^* = (x^*, y^*)^T = \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right)^T$ возможны бифуркации -циклов системы (12), при изменении параметров (r, ε) в клювовидных областях острием упирающиеся в точки на кривой $r = \frac{2}{1+\varepsilon}$ и $r \in (-1,3)$. Данный факт получается из исследования собственных значений матрицы Якоби $f'(u^*)$ в точке равновесия. В частности, точка (r^*, ε^*) на плоскости параметров в которой значения параметров

$$r^* = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1 \approx 2{,}246979 \text{и } \varepsilon^* = \frac{2}{r} - 1 \approx -0.10992$$

является острием языка Арнольда, соответствующим бифуркациям циклов периода 7 системы (12). Вычисления показывают, что эти циклы при определенных значениях параметров будут устойчивыми.

Заключение

В данной работе рассмотрены признаки устойчивости циклов в задачах о языках Арнольда в слаборезонансном и сильнорезонансном случаях. Для получения вывода о типе устойчивости периодических решений дискретных динамических систем, необходимо привести систему к виду (1) и используя нелинейности полученной системы исследовать собственные значения матрицы D из (4) или (5).

Список используемых источников

1. Арнольд, В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – Изд.2-е исп. и доп. – М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. – 400 с.
2. Юмагулов, М.Г. Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем / М.Г. Юмагулов // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5 №2. – С. 109–131.
3. Вышинский, А.А. Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах / А.А. Вышинский, Л.С. Ибрагимова, С.А. Муртазина, М.Г. Юмагулов // Уфимский математический журнал. – 2010. –Т. 2 №4. – С. 3-26.
4. Kuznetsov, Y.A. Elements of applied Bifurcation Theory / Y.A. Kuznetsov // Springer – 2014 –V. 112, SE – P. 273-275.
5. Марсден, Дж. Е. Бифуркация рождения цикла и ее приложения./ Дж. Е. Марсден, Д. М. Мак-Кракен. – М: Издательство «Мир», 1980. – 368 с.
6. Юмагулов, М.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения: теория и приложения. / М.Г. Юмагулов. – М. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. – 184 с. – ISBN 978-5-93972-652-8.
7. Юмагулов, М.Г. Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах / М.Г. Юмагулов // Доклады АН. – 2009 – Т. 424, №2 – С.177-180.
8. Гукенхеймер, Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 561 с.– ISBN 5-93972-200-8
9. Каток, А.Б. Введение в современную теорию динамических систем / А.Б. Каток, Б. Хасселблат. – М.: Факториал, 1999. – 768 с. – ISBN 5-88688-042-9.
10. Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М.: Издательство «Наука», 1966. – 531 с.

Юмагулов Марат Гаязович – д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет». E-mail: yum_mg@mail.ru.

Фазлытдинов Марат Флюрович – аспирант кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет». E-mail: fazlitdin_marat@mail.ru.

Фазлытдинов М.Ф., Юмагулов М.Г. Признаки устойчивости циклов в задаче о языках Арнольда // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2014. – №2. – С. 19-23.

Fazlytdinov, M.F. and Yumagulov, M.G., 2014. Signs ofstability of cycles in the problems of Arnold’s tongues. Software of systems in the industrial and social fields, 2: 19-23.